CORRIGÉ : EXEMPLES DE SUITES DE MATRICES – CAS DES MATRICES STOCHASTIQUES (ESCP, 1996)

Première partie : Étude d'exemples

I.1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $\alpha = 1$, alors $\gamma_n = 1$.

— Si $\alpha \neq 1$, alors $\gamma_n = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ donc :

- Si $|\alpha| < 1$, $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(1-\alpha)}$ et donc (γ_n) converge vers 0.
- Si $|\alpha| > 1$, $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha^n}{n}$ donc si $\alpha < -1$, (γ_n) n'admet pas de limite, et si $\alpha > 1$, (γ_n) diverge vers $+\infty$.
- Si $\alpha = -1$, $|\gamma_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et donc (γ_n) converge vers 0.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\gamma_n) \text{ converge si et seulement si } \alpha \in [-1,1] \text{, et sa limite est } 1 \text{ si } \alpha = 1,\ 0 \text{ sinon.}}$

I.2 **a)** On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$. (calculs faciles)

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a alors les 3 cas suivants :

- Si $k = 3q$, $q \in \mathbb{N}$, alors $A^k = A^{3q} = (A^3)^q = I_3^q$ donc $A^{3q} = I_3$.
- Si $k = 3q+1$, $q \in \mathbb{N}$ alors $A^k = A^{3q+1} = A^{3q} \cdot A$ donc $A^{3q+1} = A$.
- Si $k = 3q+2$, $q \in \mathbb{N}$ alors $A^k = A^{3q+2} = A^{3q} \cdot A^2$ donc $A^{3q+2} = A^2$.

b) Soit $q \in \mathbb{N}$. Alors $C_{3q} = \dfrac{1}{3q+1}\left[I_3 + A + \cdots + A^{3q}\right] = \dfrac{1}{3q+1}\left[I_3 + A + A^2 + I_3 + A + A^2 + \cdots + I_p + A + A^2 + I_3\right]$.

On a donc $\boxed{C_{3q} = \dfrac{1}{3q+1}\left[q(I_3 + A + A^2) + I_p\right].}$

De même, $\boxed{C_{3q+1} = \dfrac{1}{3q+2}\left[q(I_3 + A + A^2) + I_p + A\right]}$

et enfin $\boxed{C_{3q+2} = \dfrac{1}{3q+3}\left[(q+1)(I_3 + A + A^2)\right] = \dfrac{1}{3}(I_3 + A + A^2).}$

On obtient donc $C_{3q} = \dfrac{q}{3q+1}(I_3 + A + A^2) + \dfrac{1}{3q+1} I_3$, $C_{3q+1} = \dfrac{q}{3q+2}(I_3 + A + A^2) + \dfrac{1}{3q+2}(I_3 + A)$ et $C_{3q+2} = \dfrac{1}{3}(I_3 + A + A^2)$.

On obtient donc clairement $\boxed{\lim_{n\to\infty} C_n = \dfrac{1}{3}(I_3 + A + A^2) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C.}$

(puisque les trois suites extraites (C_{3q}), (C_{3q+1}), (C_{3q+2}) convergent vers cette même limite, d'après un théorème qui sera (re)vu lors du cours sur les suites.)

c) On a d'après ce qui précède $v(e_1) = v(e_2) = v(e_3) = \dfrac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Donc $\boxed{G = \operatorname{Im} v = \operatorname{Vect}(v(e_1), v(e_2), v(e_3)) = \mathbb{R}.(e_1 + e_2 + e_3)}$.

On a facilement $v(e_1 - e_2) = v(e_1 - e_3) = 0$, donc $\operatorname{Ker} v$ contient $\operatorname{Vect}\{e_1 - e_2, e_1 - e_3\}$. De plus, la famille $(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ est clairement libre, et, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} v = 3 - \operatorname{rg} v = 2$.

Donc $\boxed{F = \operatorname{Ker} v = \operatorname{Vect}\{e_1 - e_2, e_1 - e_3\}.}$

(On pouvait aussi résoudre l'équation $v(x) = 0$, et on trouve le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.)

On remarque que $C^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = C$ donc C est un projecteur.

Conclusion : $\boxed{\text{C est le projecteur sur G parallèlement à F.}}$

I.3 **a)** On cherche ici une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $w(e'_1) = e'_1$ et $w(e'_2) = -\dfrac{1}{6}e'_2$.

Soit $e'_1 = xe_1 + ye_2$, en notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. L'équation $w(e'_1) = e'_1$ conduit au système :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x + 2y) &= x \\ \frac{1}{2}(x + y)) &= y \end{aligned}$$

soit $x=y$. On peut donc choisir $e'_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

On résoud de même l'équation $w(e'_2)=-\dfrac{1}{6}e'_2$, et on trouve qu'on peut choisir $e'_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

P est alors la matrice de passage de la base canonique à la base (e'_1,e'_2) soit $\boxed{\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&4\\1&-3\end{pmatrix}}$

On aura donc, pour tout entier $k\geqslant 0$, $\mathrm{A}^k=\mathrm{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}^k\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&(-\frac{1}{6})^k\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

On calcule alors P^{-1} : $\mathrm{P}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3&4\\1&-1\end{pmatrix}$

et donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{A}^k=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3+4(-\frac{1}{6})^k&4-4(-\frac{1}{6})^k\\3-3(-\frac{1}{6})^k&4+3(-\frac{1}{6})^k\end{pmatrix}}$

b) Vu les résultats de la question précédente, on a clairement $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{A}^k=\mathrm{U}+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^k\mathrm{V}$ avec :

$\boxed{\mathrm{U}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\mathrm{V}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4&-4\\-3&3\end{pmatrix}.}$

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a alors $\mathrm{C}_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}^k=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\mathrm{U}+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^k\mathrm{V}\right]$.

On obtient donc $\boxed{\mathrm{C}_n=\mathrm{U}+\left[\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^k\right]\mathrm{V}.}$

D'après I.1, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^k=0$ et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{C}_n=\mathrm{U}.}$

d) On remarque que $\mathrm{C}^2=\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}^2=\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix}21&28\\21&28\end{pmatrix}=\mathrm{C}$. v est donc un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

De plus, clairement $\mathrm{Im}\,v=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}\,v=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

$\boxed{v\text{ est donc le projecteur sur }\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{ parallèlement à }\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}.}$

Deuxième partie : Étude de (C_n) lorsque A est r-périodique

II.1 **a)** Soit $k\in\mathbb{N}$. Notons Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de k par r, i.e $k=r\mathrm{Q}+\mathrm{R}$ avec $0\leqslant\mathrm{R}<r$.
On a alors pour tout $i\in\{0,1,\ldots,r-1\}$ $\alpha_{k+i}=\alpha_{r\mathrm{Q}+\mathrm{R}+i}=\alpha_{\mathrm{R}+i}$ par r-périodicité.
On obtient donc $\alpha_k=\alpha_{\mathrm{R}}$, $\alpha_{k+1}=\alpha_{\mathrm{R}+1},\ldots,\alpha_{k+r-1-\mathrm{R}}=\alpha_{r-1}$, $\alpha_{k+r-\mathrm{R}}=\alpha_r=\alpha_0$, $\alpha_{k+r-\mathrm{R}+1}=\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+r-1}=\alpha_{r+\mathrm{R}-1}=\alpha_{\mathrm{R}-1}$.
On a bien $\boxed{\dfrac{\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}}{r}=\gamma.}$

(Ce résultat pouvait aussi se démontrer par récurrence sur k).

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\beta_{n+r}&=(n+1+r)\gamma_{n+r}-(n+1+r)\gamma=(\alpha_0+\cdots+\alpha_{n+r})-(n+1+r)\gamma\\&=(\alpha_0+\cdots+\alpha_n)+(\alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+r})-(n+1)\gamma-r\gamma=\beta_n+(\alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+r})-r\gamma\end{aligned}$$

D'après II.1.a, on a bien $\beta_{n+r}=\beta_n$ et donc $\boxed{\text{la suite }(\beta_n)\text{ est }r\text{-périodique.}}$

Si on pose $\mathrm{M}=\max\{|\beta_0|,|\beta_1|,\ldots,|\beta_{r-1}|\}$ on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\beta_n|\leqslant\mathrm{M}$ et donc $\boxed{\text{la suite }(\beta_n)\text{ est bornée.}}$

c) D'après ce qui précède, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\gamma_n=\dfrac{\beta_n}{n+1}+\gamma$, et comme (β_n) est bornée, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma.}$

II.2 **a)** Soit $(i,j)\in\{1,\ldots,p\}^2$, et soit $k\in\mathbb{N}$.
Alors $\alpha_{k+r}=a_{i,j}(\mathrm{A}^{k+r})=a_{i,j}(\mathrm{A}^k\cdot\mathrm{A}^r)=a_{i,j}(\mathrm{A}^k)=\alpha_k$.
$\boxed{\text{La suite }(\alpha_k)\text{ est donc }r\text{-périodique.}}$

Soit $k\in\mathbb{N}$, soit $(i,j)\in\{1,\dots,p\}^2$.

Le coefficient ligne i colonne j de C_k est alors $\dfrac{1}{n+1}[a_{i,j}(I_p)+a_{i,j}(A)+\cdots+a_{i,j}(A^n)]=\dfrac{1}{n+1}[\alpha_0,\dots,\alpha_n]$.

D'après II.1.c, on a donc $\lim\limits_{k\to\infty} a_{i,j}(C_k)=\dfrac{1}{r}[\alpha_0,\dots,\alpha_{r-1}]=\dfrac{a_{i,j}(I_p)+a_{i,j}(A)+\cdots+a_{i,j}(A^{r-1})}{r}$.

On obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} C_n=C_{r-1}=\dfrac{1}{r}[I_p+A+\cdots.A^{r-}].}$

b) On a par hypothèse $A^r=I_p$, d'où clairement (cours) $\boxed{u^r=\mathrm{Id}.}$

D'après II.2.a, $v=\dfrac{1}{r}[\mathrm{Id}+u+\cdots+u^{r-1}]$, donc $u\circ v=\dfrac{1}{r}[u+u^2+\cdots+u^{r-1}+u^r]=v$ et de même $v\circ u=v$.

On a bien $\boxed{u\circ v=v\circ u=v.}$

c)
- Supposons $u(x)=x$. Alors clairement $\forall k\in\{0,\dots,r-1\}$, $u^k(x)=x$ et donc $v(x)=\dfrac{1}{r}[x+u(x)+\cdots+u^{r-1}(x)]=x$.
- Supposons $v(x)=x$. Alors $u\circ v(x)=u(x)$ or d'après II.2.b, $u\circ v(x)=v(x)$, et donc $u(x)=x$.

Conclusion : $\boxed{u(x)=x \text{ si et seulement si } v(x)=x.}$

- Supposons que $x\in\mathrm{Im}\,v$. Alors $\exists t\in\mathbb{R}^p$ tel que $v(t)=x$. On a donc $u(x)=u\circ v(t)=v(t)=x$ d'après II.2.b
- Supposons que $u(x)=x$. Alors $v(x)=x$ d'après ce qui précède, et donc $x\in\mathrm{Im}\,v$.

Conclusion : $\boxed{x\in\mathrm{Im}\,v \text{ si et seulement si } u(x)=x.}$

On a donc $x\in\mathrm{Im}\,v\Longleftrightarrow(u-\mathrm{Id})(x)=0$, et donc $\boxed{\mathrm{Im}\,v=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}).}$

d) On a pour tout $x\in\mathrm{Im}\,v$, $u(x)=x$ d'après ce qui précède, et donc $v(x)=x$ d'après II.2.c.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^p$, on a donc $v[v(x)]=v(x)$ puisque $v(x)\in\mathrm{Im}\,v$, soit $v\circ v=v$.

$\boxed{v \text{ est donc le projecteur sur G parallèlement à F.}}$

e) Soit $x\in\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$. Alors $\exists t\in\mathbb{R}^p$ tel que $x=u(t)-t$. On a donc $v(x)=v\circ u(t)-v(t)=0$ d'après II.2.b, et $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}\,v$.

De plus, d'après le théorème du rang, $\dim\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})=p-\dim\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})=p-\dim\mathrm{Im}\,v$ d'après II.2.c.

On a donc $\dim\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})=\dim\mathrm{Ker}\,v$, et $\boxed{\mathrm{Ker}\,v=\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}).}$

II.3 **a)** Par hypothèse, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant m\Longrightarrow\alpha_{n+r}=\alpha_n$.

Notons alors pour $n\in\mathbb{N}$, $\alpha'_n=\alpha_{m+n}$. La suite (α'_n) est donc r-périodique.

On définit alors la suite (γ'_n) par la formule (2) à partir de (α'_n).

On a ainsi :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant m\Longrightarrow\gamma_n=\dfrac{1}{n+1}[\alpha_0+\cdots+\alpha_m+\cdots+\alpha_n]=\dfrac{1}{n+1}[\alpha_0+\cdots+\alpha_{m-1}+\alpha'_0+\cdots+\alpha'_{n-m}]$

$=\dfrac{1}{n+1}[m\gamma_{m-1}+(n-m+1)\gamma'_{n-m}]=\dfrac{m\gamma_{m-1}}{n+1}+\dfrac{n-m+1}{n+1}\gamma'_{n-m}$.

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma'_{n-m}=\gamma'_{r-1}$ d'après II.1.c, et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m\gamma_{m-1}}{n+1}=0$ d'où

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma'_{r-1}=\dfrac{\alpha_m+\cdots+\alpha_{m+r-1}}{r}.}$

b) On raisonne de façon similaire à la question précédente, et on obtient ainsi

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\dfrac{1}{r}[A^m+A^{m+1}+\cdots+A^{m+r-1}].}$

Troisième partie : Étude de matrices stochastiques

III.1 **a)** Soit $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$ tels que $\lambda+\mu=1$, soit $(M,N)\in S_p^2$.
- Soit $(i,j)\in\{1,\dots,p\}^2$. Alors $a_{i,j}(\lambda M+\mu N)=\lambda a_{i,j}(M)+\mu a_{i,j}(N)\geqslant 0$.
- Soit $i\in\{1,\dots,p\}$. Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^p a_{i,j}(\lambda M+\mu N)=\sum_{j=1}^p[\lambda a_{i,j}(M)+\mu a_{i,j}(N)]=\lambda\sum_{j=1}^p a_{i,j}(M)+\mu\sum_{j=1}^p a_{i,j}(N)=\lambda+\mu=1$.

On a donc $\boxed{\lambda M+\mu N\in S_p.}$

En termes savants, S_p *est une partie convexe de* $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Soit $(M,N)\in S_p^2$.

- Soit $(i,j)\in\{1,\dots,p\}^2$. Alors $a_{i,j}(MN)=\displaystyle\sum_{k=1}^p a_{i,k}(M)a_{k,j}(N)\geqslant 0$.
- Soit $i\in\{1,\dots,p\}$. Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^p a_{i,j}(MN)=\sum_{j=1}^p\sum_{k=1}^p a_{i,k}(M)a_{k,j}(N)=\sum_{k=1}^p\Big[a_{i,k}\sum_{j=1}^p a_{k,j}\Big]=\sum_{k=1}^p a_{i,k}=1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{MN} \in \mathrm{S}_p\,.}$

c) Puisque $\mathrm{A} \in \mathrm{S}_p$, on a $\mathrm{A}^k \in \mathrm{S}_p$ pour tout entier k d'après la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$, $a_{i,j}(\mathrm{C}_n) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{i,j}(\mathrm{A}^k) \geqslant 0$.

On a aussi : $\forall i \in \{1,\dots,p\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\mathrm{C}_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\mathrm{A}^k)\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{C}_n \in \mathrm{S}_p\,.}$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans les inégalités et égalités précédentes, on obtient $\boxed{\mathrm{C} \in \mathrm{S}_p\,.}$

III.2 **a)** Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$.

- Supposons M déterministe. Soit $i \in \{1,\dots,p\}$. Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\mathrm{M}) = 1$, et comme les $a_{i,j}(\mathrm{M})$ sont tous dans $\{0,1\}$, il est clair qu'un et un seul indice $j \in \{1,\dots,p\}$ est tel que $a_{i,j}(\mathrm{M}) = 1$, les autres coefficients de la ligne i étant nuls.
- Supposons que les coefficients de M sont tous égaux à 0 ou 1, et chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

  Soit $i \in \{1,\dots,p\}$. Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\mathrm{M}) = 1$, et tous les coefficients de M sont clairement positifs.

Conclusion :
$\boxed{\text{M est déterministe ssi tous ses coefficients sont dans } \{0,1\}\text{, avec exactement un } 1 \text{ dans chaque ligne.}}$

b) D'après ce qui précède, à chaque matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{D}_p$, on peut associer de façon unique un p-uplet $(j_1,\dots,j_p)$ de telle sorte que, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $a_{i,j_i}(\mathrm{M}) = 1$ et $a_{i,k} = 0$ pour $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_i\}$. Réciproquement, on associe clairement également de façon unique à un tel p-uplet une matrice de D_p.

D_p est donc équipotent à $\{1,\dots,p\}^p$, et $\boxed{\mathrm{D}_p \text{ est un ensemble fini contenant } p^p \text{ éléments.}}$

c) Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathrm{D}_p^2$. Alors MN est stochastique d'après III.1.b De plus, pour $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$, $a_{i,j}(\mathrm{MN}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}(\mathrm{M}) a_{k,j}(\mathrm{N})$.

Dans cette somme, les termes $a_{i,k}$ sont tous nuls sauf un qui vaut 1, donc $a_{i,j}(\mathrm{MN}) = a_{k,j}$ avec k tel que $a_{i,k} = 1$. On a donc bien $a_{i,j}(\mathrm{MN}) \in \{0,1\}$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{MN} \in \mathrm{D}_p\,.}$

d) La suite $\left(\mathrm{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ prend toutes ses valeurs dans D_p d'après III.1.b, donc comme D_p est un ensemble fini, il existe $m \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ tels que $\boxed{\mathrm{A}^{m+r} = \mathrm{A}^m\,.}$

On a ainsi $\mathrm{A}^{m+r+1} = \mathrm{A}^{m+1}$, d'où $\mathrm{A}^{m+r+2} = \mathrm{A}^{m+2}$ et par récurrence immédiate $\mathrm{A}^{m+r+k} = \mathrm{A}^{m+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{La matrice A est donc } r\text{-périodique à partir du rang } m\,.}$

Supposons que A est inversible. Alors A^m également, et donc comme $\mathrm{A}^{m+r} = \mathrm{A}^m$, en multipliant par A^{-m} on obtient $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$.

$\boxed{\text{Si A est inversible, A est donc } r\text{-périodique.}}$

e) D'après ce qui précède, il existe $r \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$. On a donc $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{r-1} = \mathrm{I}_p$ et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{r-1}$.

D'après III.1.b, A^{-1} est déterministe comme produit de telles matrices.

De plus, A^{-1} est clairement inversible, et donc $\boxed{\mathrm{A}^{-1} \text{ est déterministe inversible.}}$

III.3 **a)** D'après III.2.d, il existe $r \geqslant 1$ tel que A soit r-périodique.

Donc, d'après II.2, la suite (C_n) converge donc vers la matrice C d'un projecteur, et donc $\boxed{\mathrm{C}^2 = \mathrm{C}\,.}$

Enfin, $\mathrm{C}_n \in \mathrm{S}_p$ et $\mathrm{C} \in \mathrm{S}_p$ découlent directement de III.1.c.

b) Si A est une matrice déterministe non inversible, d'après III.2.d, il existe $r \geqslant 1$ tel que A soit r-périodique à partir d'un certain rang m.

D'après II.3, la suite (C_n) converge donc vers la matrice $\mathrm{C} = \dfrac{1}{r}[\mathrm{A}^m + \mathrm{A}^{m+1} + \cdots + \mathrm{A}^{m+r-1}]$.

On a ainsi $\mathrm{C}^2 = \dfrac{1}{r^2}\left[\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}\mathrm{A}^{m+i}\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{r-1}\mathrm{A}^{m+j}\right] = \frac{1}{r^2}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\mathrm{A}^{(m+i)+(m+j)}$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}\mathrm{A}^{m+j+k} = \sum_{j=0}^{r-1}\mathrm{A}^{m+j}$ par périodicité de A à partir du rang m.

On a donc $\mathrm{C}^2 = \dfrac{1}{r^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\mathrm{A}^{m+j} = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\mathrm{A}^{m+j}$.

On a bien $\boxed{C^2 = C.}$

III.4 **a)** Vu que $XY = I_p$, on a bien $\boxed{\text{X et Y sont inversibles, et } X^{-1} = Y.}$

b) On a $a_{i,j}(XY) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} = \delta_{i,j}$ car $XY = I_p$.

Comme tous les $\alpha_{i,k}$ sont positifs, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_{i,k}\mu_j \geqslant \delta_{i,j}$ et donc $\mu_j \geqslant \delta_{i,j}$.

En choisissant $i = j$, on obtient $\mu_j \geqslant 1$, or tous les coefficients $\beta_{k,j}$ de Y sont positifs et de somme 1, ils sont donc tous inférieurs à 1. On en déduit que $\mu_j \leqslant 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall j \in \{1, \dots, p\},\ \mu_j = 1.}$

c) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{i=1}^{p} 1$ car Y est stochastique. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = p$.

De plus, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $\mu_j = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \mu_j = p$.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \mu j.}$

Tous les coefficients de Y sont positifs, et, puisque $\mu_j = 1$, sur chaque colonne il y a un coefficient égal à 1. Vu que la somme de tous les coefficients de Y est égale à p, il est clair que les autres coefficients sont nuls.

Conclusion : $\boxed{\text{Les coefficients de Y sont tous dans } \{0, 1\}.}$

d) D'après ce qui précède, Y est déterministe, or Y est inversible, donc $Y \in \Delta_p$.
Les rôles joués par X et Y étant symétriques, on en déduit que $X \in \Delta_p$.

Conclusion : $\boxed{\text{X et Y appartiennent à } \Delta_p.}$

e) Par hypothèse, il existe $A \in \Delta_p$ telle que $UV = A$.
On a donc $UVA^{-1} = I_p$, et d'après la question précédente, $A^{-1} \in \Delta_p$.
D'après III.4.d, VA^{-1} est un élément de S_p, et donc en appliquant encore III.4.d à $X = U$ et $Y = VA^{-1}$, on en déduit que $U \in \Delta_p$.
De même, on a $A^{-1}UV = I_p$ et on en déduit que $V \in \Delta_p$.

Conclusion : $\boxed{\text{U et V appartiennent à } \Delta_p.}$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆