# EXEMPLES DE SUITES DE MATRICES – CAS DES MATRICES STOCHASTIQUES

Dans tout le problème, $p$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $p$ à coefficients réels et $\mathrm{I}_p$ la matrice identité.

Pour tout élément M de $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout couple $(i,j)$ d'entiers compris entre 1 et $p$, on note $a_{i,j}(\mathrm{M})$ le coefficient de M situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Une matrice M appartenant à $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) Pour tout couple $(i,j)$ d'entiers compris entre 1 et $p$, $a_{i,j}(\mathrm{M}) \geqslant 0$.

(ii) Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $p$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\mathrm{M}) = 1$.

On dit qu'une suite indexée par $n$, $(\mathrm{M}_n)$ de matrices appartenant à $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers $\mathrm{M} \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j)$, la suite des coefficients $a_{i,j}(\mathrm{M}_n)$ converge vers $a_{i,j}(\mathrm{M})$ ; on dit alors que M est la limite de la suite $(\mathrm{M}_n)$.

Étant donné une matrice A appartenant à $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$, pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathrm{C}_n$ la matrice définie par la relation :

$$\mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}[\mathrm{I}_p + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^n] \qquad (1)$$

On dit enfin qu'une matrice A de $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ est $r$-périodique (où $r$ est un entier strictement positif) si $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite $(\mathrm{C}_n)$ lorsque A est stochastique et $r$-périodique.

## Première partie : Étude d'exemples

**I.1** Soit $\alpha$ un nombre réel. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\gamma_n = \dfrac{1}{n+1}[1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n]$

Calculer $\gamma_n$, étudier la convergence de la suite $(\gamma_n)$, et en cas de convergence, préciser sa limite.

**I.2** On prend $p = 3$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **a)** Calculer $\mathrm{A}^2$ et $\mathrm{A}^3$. En déduire $\mathrm{A}^k$ pour tout entier $k$.
- **b)** Pour tout entier $q$, calculer $\mathrm{C}_{3q}$, $\mathrm{C}_{3q+1}$ et $\mathrm{C}_{3q+2}$. En déduire que la suite $(\mathrm{C}_n)$ converge et préciser sa limite C.
- **c)** Soit $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C. Déterminer le noyau F et l'image G de $v$. Prouver que $v$ est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

**I.3** On prend $p = 2$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On note $w$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

- **a)** Déterminer une matrice inversible P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$. En déduire $\mathrm{A}^k$, pour tout entier $k \geqslant 0$.
- **b)** Déterminer deux matrices U et V appartenant à $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout $k \geqslant 0$, $\mathrm{A}^k = \mathrm{U} + \left(-\dfrac{1}{6}\right)^k \mathrm{V}$.
- **c)** Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer $\mathrm{C}_n$ en fonction de $n$, U et V et déterminer la limite C de la suite $(\mathrm{C}_n)$.
- **d)** Prouver que l'endomorphisme $v$ de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à C est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

## Deuxième partie : Étude de $(\mathrm{C}_n)$ lorsque A est $r$-périodique

On désigne par $r$ un entier strictement positif.

**II.1** Soit $(\alpha_k)$ une suite $r$-périodique de nombres réels, c'est-à-dire telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\alpha_{r+k} = \alpha_k$.
On pose : $\gamma = \dfrac{1}{r}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}]$, et pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n]. \qquad (2)$$

**a)** Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, $\gamma = \dfrac{1}{r}[\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1}]$.

**b)** Montrer que la suite de terme général $\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$ est $r$-périodique. Montrer qu'elle est bornée.

**c)** Montrer que $(\gamma_n)$ converge et préciser sa limite.

**II.2** Soit A une matrice $r$-périodique appartenant à $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$.

**a)** Montrer que, pour tout couple $(i, j)$ d'entiers compris entre 1 et $p$, la suite de terme général $\alpha_k = a_{i,j}(\mathrm{A}^k)$ est $r$-périodique.
En déduire que la suite $(\mathrm{C}_n)$ converge vers $\mathrm{C} = \dfrac{1}{r}[\mathrm{I}_p + \mathrm{A} + \cdots .\mathrm{A}^{r-}]$.

**b)** Soit $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, $u$ et $v$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés aux matrices A et C.
Prouver que $u^r = \mathrm{Id}$ où Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$. Montrer que $u \circ v = v \circ u = v$.

**c)** Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}^p$. Prouver que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$, puis que $x$ appartient à $\mathrm{Im}\, v$ si et seulement si $u(x) = x$.
En déduire que $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

**d)** Montrer que $v$ est le projecteur sur $\mathrm{G} = \mathrm{Im}\, v$ parallèlement à $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\, v$.

**e)** Établir enfin que $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

**II.3** **a)** Soit $(\alpha_k)$ une suite de nombre réels $r$-périodique *à partir d'un certain rang positif* $m$. On définit $\gamma_n$ par la relation (2).
Prouver que $(\gamma_n)$ admet une limite que l'on précisera.

**b)** Soit A une matrice de $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$, $r$-périodique *à partir d'un certain rang* $m$, c'est-à-dire que, pour tout entier $k \geqslant m$, $\mathrm{A}^{k+r} = \mathrm{A}^k$.
Prouver que la suite $(\mathrm{C}_n)$ admet une limite C que l'on précisera.

## Troisième partie : Étude de matrices stochastiques

On note $\mathrm{S}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D}_p$ l'ensemble des matrices *déterministes*, c'est-à-dire stochastiques et dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Enfin, on appelle $\Delta_p$ l'ensemble des matrices déterministes et inversibles.

**III.1** **a)** Prouver que, pour tout couple $(\lambda, \mu)$ de nombres réels tels que $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple $(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ de $\mathrm{S}_p$, $\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}$ appartient encore à $\mathrm{S}_p$.

**b)** Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de $\mathrm{S}_p$ appartient à $\mathrm{S}_p$.

**c)** Soit A un élément de $\mathrm{S}_p$. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathrm{C}_n$ (définie par (1)) appartient à $\mathrm{S}_p$.
Que peut-on en déduire pour la limite C de $(\mathrm{C}_n)$, lorsqu'elle existe ?

**III.2** **a)** Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ces coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

**b)** En déduire que $\mathrm{D}_p$ est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.

**c)** Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de $\mathrm{D}_p$ appartient à $\mathrm{D}_p$.

**d)** Soit A une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que $\mathrm{A}^{m+r} = \mathrm{A}^m$.
En déduire que A est $r$-périodique *à partir de ce rang* $m$ et que si de plus A est inversible, A est $r$-périodique.

**e)** Soit A une matrice déterministe inversible. Prouver que $\mathrm{A}^{-1}$ l'est aussi.

**III.3** **a)** En utilisant les résultats de la partie II, établir le résultat suivant :

Si A est une matrice déterministe *inversible*, alors $(C_n)$ converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

**b)** Étendre ce résultat au cas où A est déterministe *non inversible*.

**III.4** Soient X et Y des éléments de $S_p$ tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.

**a)** Prouver que Y est une matrice inversible et que X l'est aussi.

**b)** On pose $X = (\alpha_{ij})$, $Y = (\beta_{ij})$ et, pour tout $j$ compris entre 1 et $p$,

$$\mu_j = \max\{\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \dots, \beta_{p,j}\}$$

Prouver que $\mu_j = 1$. Pour cela, on pourra calculer le coefficient $a_{i,j}(XY)$.

**c)** Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\mu_j$.

En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou 1.

**d)** Prouver que X et Y appartiennent à $\Delta_p$.

**e)** Plus généralement, soient U et V deux matrices de $S_p$ telles que le produit UV appartient à $\Delta_p$. Prouver que U et V appartiennent à $\Delta_p$ (on pourra utiliser le résultat de la question III.2.e).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆