# CORRIGÉ DM N°12 : Concours National Marocain MP 2004

## Exemples d'utilisation du théorème de Courant-Fischer.

## $1^{\text{ère}}$ Partie

### A- Étude d'une matrice

**1.** $\mathrm{M} = \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & & u_2u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}$.

Donc pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $\{1,\dots,n\}$, on a : $m_{i,j} = u_iu_j$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

**2.** La $j$-ème colonne de M est $u_j\mathrm{U}$.

**3.** On sait que le rang d'une matrice est égal celui de ses colonnes ; or, toutes les colonnes de M sont proportionnelles à U, et il y en a au moins une non nulle, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$.

**4.** $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1 \neq n$, donc M n'est pas inversible et en particulier 0 est une valeur propre de M.
D'autre part : $\mathrm{MY} = 0 \Rightarrow {}^t\mathrm{YU}\,{}^t\mathrm{UY} = 0 \Rightarrow \|{}^t\mathrm{UY}\| = 0 \Rightarrow {}^t\mathrm{UY} = 0$ et, réciproquement, ${}^t\mathrm{UY} = 0 \Rightarrow \mathrm{MY} = 0$.
Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est égal à $\{\mathrm{Y} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{UY} = 0\}$. Sa dimension est $n-1$ car c'est un hyperplan de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{Y} & \longmapsto & {}^t\mathrm{UY} \end{array}$.

**5.** $\mathrm{MU} = \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{UU} = \underbrace{({}^t\mathrm{UU})}_{\in\mathbb{R}}\mathrm{U}$, avec $\mathrm{U} \neq 0$, donc ${}^t\mathrm{UU} = \mathrm{tr}(\mathrm{M})$ est une autre valeur propre de M, avec U est vecteur propre associé. La dimension du sous-espace propre associé ne peut pas dépasser 1, puisque déjà celui associé à 0 est de dimension $n-1$, donc sa dimension est 1 et c'est la droite vectorielle engendrée par U.

**6.** La matrice M étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, c'est-à-dire qu'elle est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $\mathrm{D} = \mathrm{diag}({}^t\mathrm{UU}, 0, \dots, 0)$.
Les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres ${}^t\mathrm{UU}$ et 0 sont $\mathrm{Vect}(\mathrm{U})$ et $\{\mathrm{Y} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{UY} = 0\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})^\perp$, de dimensions 1 et $n-1$ respectivement.

### B- Théorème de Courant–Fischer

**1.** C'est du cours...

**2.** *Remarque : l'application* $\mathrm{R_A}$ *définie dans l'énoncé s'appelle le quotient de Rayleigh.*

$\mathrm{R_A}(e_k) = \dfrac{<\mathrm{A}e_k, e_k>}{<e_k, e_k>} = \dfrac{<f(e_k), e_k>}{<e_k, e_k>} = \lambda_k$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ car $f(e_k) = \lambda_k e_k$.

**3.** $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$, d'où $<f(v), v> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ et $<v, v> = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

**4.** On a $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$, d'où $\lambda_1 <v,v> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 \leqslant <f(v), v> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n <v,v>$,
donc $\lambda_1 \leqslant \mathrm{R_A}(v) \leqslant \lambda_n$ pour tout $v \neq 0$, d'où $\lambda_1 \leqslant \inf_{v\neq0} \mathrm{R_A}(v)$ et $\sup_{v\neq0} \mathrm{R_A}(v) \leqslant \lambda_n$ (ces bornes sup et inf existent).
D'autre part $\mathrm{R_A}(e_1) = \lambda_1$ et $\mathrm{R_A}(e_n) = \lambda_n$ donc ces bornes sup et inf sont atteintes et finalement :

$$\lambda_1 = \min_{v\neq0} \mathrm{R_A}(v) \quad \text{et} \quad \lambda_n = \max_{v\neq0} \mathrm{R_A}(v).$$

**5.** Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$w \in \mathrm{V}_k \implies w = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \implies <f(w), w> = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2$$

et $<w,w> = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$, d'où $\mathrm{R_A}(w) = \dfrac{<f(w),w>}{<w,w>} \leqslant \lambda_k$ pour tout $w \in \mathrm{V}_k \setminus \{0\}$, d'où $\lambda_k \geqslant \sup\limits_{v \in \mathrm{V}_k \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v)$ (et cette borne sup existe).

De plus, $e_k \in \mathrm{V}_k \setminus \{0\}$ et $\mathrm{R_A}(e_k) = \lambda_k$, donc cette borne sup est atteinte et $\lambda_k = \max\limits_{v \in \mathrm{V}_k \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v)$.

**6. a)** Supposons $\dim\left(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)\right) = 0$, alors $\dim\left(\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)\right) = k + (n-k+1) = n+1$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension $n$.

Donc $\dim\left(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)\right) \neq 0$ et par suite $\dim\left(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)\right) \geqslant 1$.

**b)** $w \in \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n) \implies w = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i \implies < f(w), w > = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2$ et $<w,w> = \sum_{i=k}^{n} x_i^2$, d'où $\mathrm{R_A}(w) = \dfrac{<f(w),w>}{<w,w>} \geqslant \lambda_k$.

**c)** D'après **5.**, on a : $\lambda_k = \max\limits_{v \in \mathrm{V}_k \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v)$ et $\mathrm{V}_k \in \mathscr{F}_k$, d'où $\lambda_k \geqslant \min\limits_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}_k} \left( \max\limits_{v \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v) \right)$, et d'après **6.b)**, $\lambda_k \leqslant \mathrm{R_A}(w) \leqslant \max\limits_{v \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v) \quad \forall \mathrm{F} \in \mathscr{F}_k$, d'où $\lambda_k \leqslant \min\limits_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}_k} \left( \max\limits_{v \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v) \right)$, puis l'égalité.

**7. a)** L'application $\psi_{\mathrm{A}} : v \longmapsto <\mathrm{A}v, v>$ est continue sur $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant que produit scalaire des deux fonctions continues (car linéaires en dimension finie) $v \mapsto \mathrm{A}v$ et $v \mapsto v$.

On en déduit la continuité de l'application $\mathrm{R_A}$ sur $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ comme rapport de deux fonctions continues $v \mapsto <\mathrm{A}v, v>$ et $v \mapsto <v,v>$ avec un dénominateur qui ne s'annule jamais.

**b)** Soient A et B deux éléments de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on cherche les relier par un chemin continu qui ne passe pas par l'origine.

– *1er cas :* $0 \notin [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ alors le chemin $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \\ t & \longmapsto & t\mathrm{A} + (1-t)\mathrm{B} \end{array}$ convient.

– *2ème cas :* $0 \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, on se fixe un élément $\mathrm{C} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $0 \notin [\mathrm{A}, \mathrm{C}]$ et $0 \notin [\mathrm{C}, \mathrm{B}]$, on relie alors A à C puis C à B.

Ainsi l'ensemble $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et son image par l'application $\mathrm{R_A}$ est aussi un ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle car les seule parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

**c)** D'après ce qui précède $\{\mathrm{R_A}(v),\ v \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ \}$ est un intervalle. Or $\lambda_1 = \min\limits_{v \neq 0} \mathrm{R_A}(v)$ et $\lambda_n = \max\limits_{v \neq 0} \mathrm{R_A}(v)$. D'où $\{\mathrm{R_A}(v),\ v \in \mathrm{mat}\, n, 1\mathbb{R} \setminus \{0\}\ \} = [\lambda_1, \lambda_n]$.

## 2ème Partie

**1.** Soit B une matrice symétrique réelle d'ordre $n$.

– Supposons B définie positive et soit $\lambda$ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé, alors ${}^t\mathrm{XBX} = \lambda \|\mathrm{X}\|^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$ puisque $\mathrm{X} \neq 0$.

– Inversement, supposons que B admette des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ strictement positives. Puisque B est symétrique, alors elle orthogonalement diagonalisable, c'est dire $\exists$P inversible telle que $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{PDP}$, avec ${}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On aura alors, $\forall \mathrm{X} \neq 0$, ${}^t\mathrm{XBX} = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{PDPX} = {}^t\mathrm{YDY}$ avec $\mathrm{Y} = \mathrm{PX}$, soit, avec des notations évidentes, ${}^t\mathrm{XBX} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ d'où ${}^t\mathrm{XBX} > 0$ puisque, P étant inversible, Y est non nul. Ainsi, B est définie positive.

Conclusion : B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

**2. a)** A est définie positive, donc pour ${}^t\mathrm{X} = (1,0) \neq 0$ on a : $a = {}^t\mathrm{XAX} > 0$.
D'autre part, $\det(\mathrm{A}) = ac - b^2 > 0$ car c'est le produit des valeurs propres de A.

**b)** ${}^t\mathrm{XAX} = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2})y^2\right) = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{ac-b^2}{a^2})y^2\right) > 0$. Donc A est définie positive.

**3. a)** Pour tous $x, y \in \mathrm{H}$ : $< g(x), y > = < p \circ f(x), y > = < f(x), p(y) > = < f(x), y >$ car $p$ est le projecteur orthogonal sur H donc est autoadjoint, et de même $< x, g(y) > = < x, f(y) >$.
Or $f$ est symétrique d'où $< f(x), y > = < x, f(y) >$, donc $< g(x), y > = < x, g(y) >$, et $g$ est bien un endomorphisme autoadjoint de H.

**b)** Soit $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de $g$, telle que les valeurs propres associées sont $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$.
Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on pose : $\mathrm{V}'_k = \mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_k)$, et comme précédemment on montre que $\mu_k = \max\limits_{v \in \mathrm{V}'_k \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v)$. Or $\mathrm{V}'_k \in \mathscr{F}_k$ et $\lambda_k = \min\limits_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}_k} \left( \max\limits_{v \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \mathrm{R_A}(v) \right)$, donc $\lambda_k \leqslant \mu_k$.

**c)** Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

i. Supposons $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) < k$, donc $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{H}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{H} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) = n + k - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) > n$, impossible puisque $\mathrm{F} \cap \mathrm{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension $n$. D'où $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \geqslant k$.

ii. $g(v) = p(f(v))$, donc $g(v) - f(v) \in \mathrm{H}^{\perp}$ ; or $v \in \mathrm{H}$, d'où $< g(v) - f(v), v > = 0$ et donc $< g(v), v > = < f(v), v >$.
En particulier $< g(v), v > \leqslant \max\limits_{v \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \dfrac{<f(v), v>}{<v, v>} \quad \forall v \in \mathrm{G} \setminus \{0\}$,
d'où $\max\limits_{v \in \mathrm{G} \setminus \{0\}} \dfrac{<g(v), v>}{<v, v>} \leqslant \max\limits_{v \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \dfrac{<f(v), v>}{<v, v>}$.

iii. En passant au min dans l'inégalité précédente et en utilisant le théorème de Courant-Fischer à gauche pour $g$ et à droite pour $f$ et vu que G est de dimension $k$ et F de dimension $k+1$, on conclut que $\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

**4. a)** $\mathrm{A}_{n-1}$ n'est autre que la matrice de $g$, elle est symétrique car $g$ est auto–adjoint.

**b)** Application directe de ce qui précède : on a $\lambda_k \leqslant \mu'_k \leqslant \lambda_{k+1}$ puisque les $\mu'_k$ sont aussi valeurs propres de $g$.

**c)** Si la matrice A est définie positive, alors toutes ses valeurs propres $\lambda_k$ sont strictement positives il en sera de même pour les valeurs propres $\mu'_k$ de la matrice $\mathrm{A}_{n-1}$. D'après la question **II.1**, on en déduit que $\mathrm{A}_{n-1}$ est définie positive.

**5. a)** Si A est définie positive alors toutes les matrices $\mathrm{A}_k$ sont aussi définies positives d'après la question précédente (itérée), donc leurs déterminants sont tous strictement positifs (produit des valeurs propres).

**b)** Le résultat est déjà vérifié pour $n = 2$.
Supposons le résultat vérifié à l'ordre $n-1$, et soit A d'ordre $n$ symétrique réelle vérifiant la propriété de l'énoncé. La matrice $\mathrm{A}_{n-1}$ vérifie alors cette même propriété et, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{A}_{n-1}$ est définie positive. En reprenant les notations de la question **4.b**, on a $\mu'_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et en particulier $\lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$. Or $\det \mathrm{A} = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, d'où $\lambda_1 > 0$ ; ainsi A est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, donc est définie positive.

**6. a)** Notons $D_n$ le déterminant de la matrice $M(t)$. En faisant les opérations $C_j \leftarrow C_j - tC_{j-1}$ pour $j$ variant de $n$ à 2, on obtient une matrice triangulaire inférieure avec $(1, 1-t^2, \dots, 1-t^2)$ sur la diagonale.

Donc $D_n = (1-t^2)^{n-1} > 0$. Les déterminants des matrices extraites en considérant les $k$ premières lignes et colonnes sont égaux, de la même façon, à $(1-t^2)^{k-1}$ donc sont tous $> 0$. D'après le résultat de la question précédente, $M(t)$ est bien définie positive.

**b)** $\forall X \neq 0 \; {}^tXM_1X = {}^tX\left(\displaystyle\int_0^1 M(t)\,dt\right)X = \displaystyle\int_0^1 {}^tXM(t)X\,dt > 0$ car ${}^tXM(t)X$ est une fonction continue $> 0$, d'où $M_1$ est définie positive.

## 3ème Partie

### A- Une deuxième application

**1. a)** $\forall F \in \mathscr{F}_k,\ \forall v \in F \setminus \{0\}$, on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v)$ d'où :

$$\begin{aligned}\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A'}(v) = \max_{v\in F\setminus\{0\}} (R_A(v)+R_E(v)) &\leqslant \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_E(v) \\ &\leqslant \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \max_{v\neq 0} R_E(v) = \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \mu_n\end{aligned}$$

d'où :

$$\min_{F\in\mathscr{F}} \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A'}(v) \leqslant \min_{F\in\mathscr{F}} \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \mu_n$$

et donc $\lambda'_k \leqslant \lambda_k + \mu_n$.

D'autre part, $\forall F \in \mathscr{F}_k,\ \forall v \in F \setminus \{0\}$, on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v) \geqslant R_A(v) + \mu_1$ ; en passant une première fois au max sur $v \in F \setminus \{0\}$ puis une deuxième fois au min sur $F \in \mathscr{F}$ on obtient l'autre égalité.

Donc pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\lambda_k + \mu_1 \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \mu_n$.

**b)** D'après la question précédente on a : $\mu_1 \leqslant \lambda'_k - \lambda_k \leqslant \mu_n$, d'où $|\lambda'_k - \lambda_k| \leqslant \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$.

Montrons alors que $\|A' - A\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|(A'-A)X\|}{\|X\|} = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$.

En effet $A' - A = E$ est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale $(e'_1, \dots, e'_n)$ : il existe une matrice $P$ orthogonale telle que $E = {}^tPDP$, avec $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, et $\mu_1 \leqslant \dots \leqslant \mu_n$, de sorte que pour tout $k$, $|\mu_k| \leqslant \max(|\mu_1|, |\mu_n|) = r$.

Pour tout $X \neq 0$, on a $\|EX\|^2 = {}^t(EX)EX = {}^tX{}^tPD\underbrace{P{}^tP}_{I_n}DPX = {}^tYD^2Y$ avec $Y = PX$, d'où si $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, $\|EX\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^n \mu_k^2 y_k^2 \leqslant r^2 \sum_{k=1}^n y_k^2 = r^2\|Y\|^2 = r^2\,\|X\|^2$, d'où $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \leqslant r$.

D'autre part, $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \geqslant \dfrac{\|Ee'_1\|}{\|e'_1\|} = |\mu_1|$ et $\|A - A'\| = \max\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \geqslant \dfrac{\|Ee'_n\|}{\|e'_n\|} = |\mu_n|$, d'où $\|A - A'\| \geqslant \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, puis l'égalité cherchée.

**2.** Soit $A \in S_n^+$, on cherche $\varepsilon > 0$ tq $\|A - A'\| \leqslant \varepsilon \implies A' \in S_n^+$, ce qui revient à dire que la boule ouverte de centre $A$ et de rayon $\varepsilon$ est incluse dans $S_n^+$.

Or :

$$\|A - A'\| \leqslant \varepsilon \implies |\lambda'_k - \lambda_k| \leqslant \varepsilon \implies \lambda'_k \geqslant \lambda_k - \varepsilon$$

donc si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k > 0$, on aura $\lambda'_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et toutes les valeurs propres de $A'$ qui est symétrique sont strictement positives, d'où $A'$ est définie positive.

**B- Une dernière application**

**1.** Les matrices R et S sont orthogonales, d'où :
${}^t\mathrm{RR} = \mathrm{I}_n$ et ${}^t\mathrm{SS} = \mathrm{I}_{n-1}$, d'où

$$ {}^t\mathrm{QQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{S} \end{pmatrix}^t \mathrm{RR} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{SS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{I}_n $$

donc la matrice Q est orthogonale.

**2.** Simple calcul, en utilisant les relations :

$$ {}^t\mathrm{RMR} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{UU} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ {}^t\mathrm{RAR} = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t a \\ a & \mathrm{A}_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\mathrm{SA}_{n-1}\mathrm{S} = \mathrm{diag}(\alpha_2, \dots, \alpha_n). $$

**3.** On a $\mathrm{A}_\varepsilon - \mathrm{A} = \varepsilon\mathrm{M}$, donc $\mathrm{A}_\varepsilon$ jouera le rôle de $\mathrm{A}'$ et $\varepsilon\mathrm{M}$ celui de E, dont les valeurs propres sont $\mu_1 = 0$ et $\mu_n = \varepsilon {}^t\mathrm{UU}$.

**4. a)** C'est un résultat du cours puisque la matrice Q est orthogonale.

**b)** Le coefficient d'indice $(i,j)$ de ${}^t\mathrm{QAQ}$ s'obtient en faisant le produit scalaire de la $i$-ème ligne de ${}^t\mathrm{Q}$ avec la $j$-ème colonne de $\mathrm{AQ} = \mathrm{AC}_j$, donc ce coefficient est :

$$ {}^t\mathrm{C}_i\mathrm{AC}_j = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j = 1 \\ \alpha_i & \text{si } i = j \geqslant 2 \\ \beta_i & \text{si } i = 1, j \geqslant 2 \text{ ou } j = 1, i \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} $$

Soit $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^n y_i \mathrm{C}_i \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^t\mathrm{XAX} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j {}^t\mathrm{C}_i\mathrm{AC}_j = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^2 + 2\sum_{j=2}^n \beta_j y_1 y_j$.

**c)** De manière analogue on a : ${}^t\mathrm{XA}_\varepsilon\mathrm{X} = (\alpha + \varepsilon {}^t\mathrm{UU})y_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^2 + 2\sum_{j=2}^n \beta_j y_1 y_j = {}^t\mathrm{XAX} + \varepsilon {}^t\mathrm{UU} y_1^2$.

Ainsi : $\mathrm{R}_{\mathrm{A}_\varepsilon}(\mathrm{X}) = \dfrac{{}^t\mathrm{XA}_\varepsilon\mathrm{X}}{<\mathrm{X},\mathrm{X}>} = \dfrac{{}^t\mathrm{XAX} + \varepsilon {}^t\mathrm{UU} y_1^2}{<\mathrm{X},\mathrm{X}>} = \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{X}) + \varepsilon {}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U}\dfrac{y_1^2}{<\mathrm{X},\mathrm{X}>}$.

**d)** Choisir $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$ tq $\mathrm{F} \in \mathscr{F}_2$ avec $y_1 = 0$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆