CORRIGÉ : SOUS-ALGÉBRES NILPOTENTES DE $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ (extrait de XM' 1996))

Première partie

I.1 **a)** Ici l'espace est de dimension 2, donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{T} \leqslant 2$. Or T n'est ni nul ni inversible (car la composée d'applications bijectives est bijective, donc ne peut être nulle), donc T est de rang 1.
Alors, d'après le théorème du rang, $\ker\mathrm{T}$ et $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ sont de dimension 1.

b) Puisque T est non nul, on a $r \geqslant 2$. On a $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}^{r-1} \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{T}$. Puisque T^{r-1} n'est pas nul par définition de r, on a $1 \leqslant \dim\mathrm{Im}\,\mathrm{T}^{r-1} \leqslant \dim\mathrm{Im}\,\mathrm{T} = 1$, donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}^{r-1} = \mathrm{Im}\,\mathrm{T}$. Or $\mathrm{T}^r = \mathrm{T}\mathrm{T}^{r-1} = 0$ implique $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}^{r-1} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$. Donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$, d'où l'égalité par l'égalité des dimensions.

c) On prend e_2 non nul dans $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$. Donc il existe e_1 tel que $e_2 = \mathrm{T}(e_1)$, et (e_1, e_2) est libre car $e_1 \notin \mathrm{Ker}\,\mathrm{T} = \mathbb{K}e_2$. Donc (e_1, e_2) est une base de E et dans cette base, la matrice de T est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et il est alors clair que $\mathrm{T}^2 = 0$ soit $r = 2$.

I.2 Il existe dans $\mathscr{A}$ un élément non nul T. $\mathscr{A}$ étant nilpotente, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{A}^r = 0$, donc d'après la question précédente, il existe une base (e_1, e_2) de E où la matrice de T est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\mathrm{U} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est représenté dans cette base par $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{U} = c\mathrm{T}$ donc $\mathrm{U} \in \mathscr{A}$.

Réciproquement, soit $\mathrm{U} \in \mathscr{A}$. Alors $\mathrm{U}^2 = 0$ (soit $\mathrm{U} = 0$, soit on applique encore la question précédente). Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans (e_1, e_2). Alors $\mathrm{U} - c\mathrm{T} \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$), donc $(\mathrm{U} - c\mathrm{T})^2 = 0$ soit $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 = 0$ d'où l'on tire $a = d = 0$.
Enfin, $\mathrm{U} + \mathrm{T} \in \mathscr{A}$ donc $0 = (\mathrm{U} + \mathrm{T})^2 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{UT} + \mathrm{TU} + \mathrm{T}^2$, d'où $\mathrm{UT} + \mathrm{TU} = 0$ soit
$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = 0$, ce qui donne $b = 0$.
Finalement, la matrice de U dans la base (e_1, e_2) est bien de la forme voulue.

Deuxième partie

II.1 Pour $x \in \mathrm{E}$ on a : $(\mathrm{T}(x))_i = \mathrm{P}_i(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{P}_i \circ \mathrm{T}\left(\sum_j x_j\right) = \sum_j \mathrm{P}_i \circ \mathrm{T}(x_j)$.

On prend donc $\mathrm{T}_{i,j} = \mathrm{P}_i \circ \mathrm{T}\big|\mathrm{E}_j$ (il s'agit de la restriction à E_j.)

II.2

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ST})_{i,j} &= \mathrm{P}_i \circ \mathrm{ST}\big|\mathrm{E}_j = \mathrm{P}_i \circ \mathrm{S} \circ (\sum_k \mathrm{P}_k) \circ \mathrm{T}\big|\mathrm{E}_j && \text{car } \sum_k \mathrm{P}_k = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \\
&= \sum_k \mathrm{P}_i \circ \mathrm{S} \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{T}\big|\mathrm{E}_j && \text{par distributivité} \\
&= \sum_k \mathrm{P}_i \circ \mathrm{S}\big|\mathrm{E}_k \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{T}\big|\mathrm{E}_j && \text{car } \mathrm{Im}\,\mathrm{P}_k = \mathrm{E}_k \\
&= \sum_k \mathrm{S}_{i,k}\mathrm{T}_{k,j} && \text{par définition des deux tableaux}
\end{aligned}$$

Rem : il s'agit là d'une démonstration élégante de la formule du produit par blocs...

Troisième partie

III.1 Si $\mathrm{E}_3 = \mathrm{E}$ on a à la fois $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T} \supset \mathrm{E}$, et $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} \supset \mathrm{E}$ c'est à dire $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T} = \mathrm{E}$, et $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} = \mathrm{E}$, ce qui contredit le th. du rang.
Si $\mathrm{E}_3 = \{0\}$, alors $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{T} \oplus \mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ et la restriction de T à $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$, supplémentaire du noyau, est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ sur $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$. L'endomorphisme induit par T sur $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ serait alors bijectif, ce qui est exclu car $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} \neq \{0\}$ et $\mathrm{T}^r = 0$.

III.2 $\mathrm{E}_3 = \mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ équivaut à $\mathrm{Im}\,\mathrm{T} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$, soit $\mathrm{T}^2 = 0$, c'est-à-dire $r = 2$ ($r = 1$ est exclu car $\mathrm{T} \neq 0$)

III.3 — *Rem :* D'après la question précédente, l'hypothèse $r \geqslant 3$ implique que E_2 n'est pas réduit à $\{0\}$; E_3 n'est pas réduit à $\{0\}$ d'après la question III.1 ; enfin, E_1 ne peut pas non plus être égal à $\{0\}$ sinon on aurait $\operatorname{Im} T = E$ et T serait bijective.

E_1 est un supplémentaire de $\operatorname{Im} T$ dans E, donc les images des vecteurs de base ont des projections nulles sur E_1 ; le premier bloc de lignes de la matrice par blocs est donc nul.
E_3 est inclus dans le noyau, donc tous les vecteurs de E_3 ont des images nulles ; le dernier bloc de colonnes de la matrice par blocs est donc nulle.

— T^k est représenté par une matrice de la forme $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ? & T_{2,2}^k & 0 \\ ? & ? & 0 \end{bmatrix}$ donc $T_{2,2}^r = 0$: ce bloc est nilpotent.

— Raisonnons alors par récurrence sur n : l'hypothèse de récurrence est
$\mathscr{H}_n$: «pour tout endomorphisme nilpotent T d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n E, il existe une base de E où la matrice de T est triangulaire inférieure à éléments diagonaux nuls»

Pour $n = 1$ c'est immédiat (matrice nulle) et pour $n = 2$ cela a été fait en I.1.

Supposons $\mathscr{H}_d$ démontrée pour tout $d < n$ et soit $T \neq 0$ nilpotent dans $\mathbb{K}^n$.
Si $T = 0$, c'est fini.

Si T est nilpotent d'indice 2, on a vu en III.2 que $E_3 = \operatorname{Im} T$, donc on peut faire une décomposition analogue à celle de III.3, avec E_2 réduit à $\{0\}$, donc de la forme : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_{3,1} & 0 \end{bmatrix}$ qui répond à la question.

Si T est r-nilpotent, avec $r > 2$, la décomposition faite en III.3 ramène au même problème pour l'endomorphisme de E_2 représenté par $T_{2,2}$, avec E_2 de dimension strictement inférieure à n : on applique l'hypothèse de récurrence : il existe une base de E_2 où la matrice de cet endomorphisme est triangulaire inférieure à éléments diagonaux nuls, et la concaténation d'une base de E_1, de cette nouvelle base de E_2 et d'une base de E_3 donne une base de E où la matrice de T a la forme voulue.

III.4 Montrons par récurrence que la puissance n-ième d'une matrice strictement triangulaire inférieure (ie. triangulaire inférieure à diagonale nulle) d'ordre n est nulle.
Pour $n = 1$ c'est évident.
Si le résultat est acquis pour toute matrice de ce type de taille $n-1$, une telle matrice d'ordre n peut s'écrire en blocs de la sorte : $M = \begin{bmatrix} T & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix}$, la matrice T étant strictement triangulaire inférieure d'ordre $\leqslant n-1$, et L étant une matrice ligne. Le produit par blocs donne facilement $M^p = \begin{bmatrix} T^p & 0 \\ LT^{p-1} & 0 \end{bmatrix}$. Avec $p = n$ et l'hypothèse de récurrence, on obtient le résultat.
Autre méthode possible : examiner l'action de T et de ses puissances successives sur la base canonique. Voit IV.4.c.
Ainsi, $T^n = 0$ d'où par définition de r, $r \leqslant n$.

III.5 Il suffit d'appliquer la méthode précédente. Si $(e_1, \ldots, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^4$, on a ici $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}(e_2)$ et $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}(e_2, e_3, e_4)$, donc on peut prendre $E_3 = \operatorname{Vect}(e_2)$, $E_2 = \operatorname{Vect}(e_3, e_4)$ et $E_1 = \operatorname{Vect}(e_1)$.
La matrice de T dans la base (e_1, e_3, e_4, e_2) est alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et c'est fini !!

Quatrième partie

IV.1 L'ordre de nilpotence valant r, il existe $r-1$ matrices $T_1, \ldots, T_{r-1}$ appartenant à $\mathscr{A}$ dont le produit $P = A_1 A_2 \cdots A_{r-1}$ n'est pas nul (et $P \in \mathscr{A}$ car $\mathscr{A}$ algèbre), alors que tout produit de r éléments de $\mathscr{A}$ est nul. Donc, pour tout $T \in \mathscr{A}$, $PT = 0$ d'où $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} P$. Le noyau de P, différent de E, contient donc $\mathscr{I}(\mathscr{A})$. $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ est donc distinct de E.

E_3 est inclus dans $\mathscr{I}(\mathscr{A})$, il est donc distinct de E.
D'autre part, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a pour tout $T \in \mathscr{A}$, $TP = 0$, donc $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Ker} T$ et par suite, $\operatorname{Im} P \subset \mathscr{K}(\mathscr{A})$. On a aussi $\operatorname{Im} P \subset \mathscr{I}(\mathscr{A})$ car $P \in \mathscr{A}$, donc $\operatorname{Im} P \subset E_3$ et $E_3 \neq \{0\}$ puisque $P \neq 0$.

IV.2 $E_3 = \mathscr{I}(\mathscr{A})$ signifie que $\mathscr{I}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{A})$, et que toute image d'élément de $\mathscr{A}$ est incluse dans tous les noyaux des éléments de A. En prenant $T \neq 0 \in \mathscr{A}$, on a donc $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} T$, d'où $r = 2$ d'après III.2.
Réciproquement, si $r = 2$, on a $UT = 0$ pour tous $U, T \in \mathscr{A}$, donc $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} U$ pour tous $U, T \in \mathscr{A}$, d'où $\mathscr{I}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{A})$.

IV.3 Raisonnons par contraposition, et supposons que, pour tout $(\mathrm{S},\mathrm{U})\in\mathscr{A}^2$, $\mathrm{STU}=0$.
Alors $\operatorname{Im}\mathrm{U}\subset\operatorname{Ker}\mathrm{ST}$ pour tout $\mathrm{U}\in\mathscr{A}$, donc $\mathscr{I}(\mathscr{A})\subset\operatorname{Ker}\mathrm{ST}$, soit $\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3\subset\operatorname{Ker}\mathrm{ST}$ d'où $\mathrm{ST}(\mathrm{E}_2)=\{0\}$ (car $\mathrm{ST}(\mathrm{E}_3)=\{0\}$ puisque $\mathrm{E}_3\subset\mathscr{K}(\mathscr{A})$). Donc $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)\subset\operatorname{Ker}\mathrm{S}$, et cela pour tout $\mathrm{S}\in\mathscr{A}$ d'où $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)\subset\mathscr{K}(\mathscr{A})$. Mais on a aussi évidemment $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)\subset\mathscr{I}(\mathscr{A})$ d'où $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)\subset\mathscr{I}(\mathscr{A})\cap\mathscr{K}(\mathscr{A})=\mathrm{E}_3$, ce qui signifie $\mathrm{T}_{22}=\{0\}$.

IV.4 **a)** Pour commencer, $\mathscr{A}_{ij}$ est bien un espace vectoriel (c'est admis par l'énoncé !) parce que l'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A}_{ij}\\ \mathrm{T} & \longmapsto & \mathrm{T}_{ij}\end{array}$ est linéaire (transport de structure).

L'écriture du produit par blocs montre facilement que $\mathscr{A}_{2,2}$ est une sous-algèbre nilpotente d'ordre $r'\leqslant r$ (si on fait le produit de deux matrices T et U de la forme indiquée, on obtiendra une matrice de la même forme, avec justement comme bloc au milieu le produit $\mathrm{T}_{22}\mathrm{U}_{22}$).

Si $\mathscr{A}_{22}$ est nulle alors les matrices des éléments de $\mathscr{A}$ sont de la forme $\mathrm{T}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ \mathrm{T}_{2,1}&0&0\\ \mathrm{T}_{3,1}&\mathrm{T}_{3,2}&0\end{bmatrix}$, et on a alors (produit par blocs) $\mathrm{T}^3=0$, d'où $r\leqslant 3$ (en fait $r=3$ puisque l'énoncé suppose $r\geqslant 3$).

Réciproquement, si $r=3$, alors, $\forall(\mathrm{S},\mathrm{T},\mathrm{U})\in\mathscr{A}^2$, $\mathrm{STU}=0$, donc $\mathrm{T}_{22}=0$ d'après IV.3. Cela est vrai pour tout $\mathrm{T}\in\mathscr{A}$, donc $\mathscr{A}_{22}$ est nulle.

b) On fait une récurrence sur n comme au III.3, répétant la construction ci-dessus sur $\mathscr{A}_{22}$ tant que nécessaire, jusqu'à obtenir une sous-algèbre nulle, ou vérifiant $r\leqslant 2$ (cas où $\mathrm{E}_2=\{0\}$)

c) On pourrait raisonner comme dans III.4, et démontrer $r\leqslant n$ par récurrence sur n en faisant des produits par blocs. Mais changeons un peu de méthode (celle suggérée à la fin de III.4).

Considérons n matrices T_i écrites dans la base $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ construite dans la question précédente, strictement triangulaires inférieures.

Pour tout $k\in[1,n]$, notons $\mathrm{G}_k=\operatorname{Vect}(\{\varepsilon_k,\dots,\varepsilon_n\})$ et $\mathrm{G}_{n+1}=\{0\}$. Nous avons donc $\mathrm{T}_i(\mathrm{G}_k)\subset\mathrm{G}_{k+1}$. Il en résulte que $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\dots\mathrm{T}_i(\mathrm{G}_k)\subset\mathrm{G}_{k+i}$, et enfin $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\dots\mathrm{T}_n(\mathrm{G}_k)=\{0\}$,
donc $r\leqslant n$.

IV.5 *Note : Le rôle de l'hypothèse $r\geqslant 4$ est dissimulé dans ce qui suit : il faut que, lorsque dans un produit de $r-1$ éléments on supprime le premier et le dernier, il reste au moins un terme, c'est à dire $r-1\geqslant 3$.*

— Montrons d'abord $r'\leqslant r-2$. Par définition de r', il existe $r'-1$ éléments de $\mathscr{A}_{22}$ dont le produit n'est pas nul, donc $r'-1$ éléments $\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_{r'-1}$ de $\mathscr{A}$ tels que $(\mathrm{T}_1\cdots\mathrm{T}_{r'-1})_{22}=(\mathrm{T}_1)_{22}\cdots(\mathrm{T}_{r'-1})_{22}\neq 0$. D'après IV.3, il existe S et U dans $\mathscr{A}$ tels que $\mathrm{ST}_1\cdots\mathrm{T}_{r'-1}\mathrm{U}\neq 0$. On a donc le produit de $r'+1$ éléments de $\mathscr{A}$ qui est non nul, d'où $r'+1\leqslant r-1$ et $r'\leqslant r-2$.

— Ensuite, par définition de r, il existe $r-1$ éléments $\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_{r-1}$ de $\mathscr{A}$ dont le produit n'est pas nul. Donc, en appliquent de nouveau le résultat de IV.3, avec $\mathrm{S}=\mathrm{T}_1$, $\mathrm{U}=\mathrm{T}_{r-1}$ et $\mathrm{T}=\mathrm{T}_2\cdots\mathrm{T}_{r-2}$, on a $(\mathrm{T}_2)_{22}\cdots(\mathrm{T}_{r-2})_{22}\neq 0$, donc $r-3\leqslant r'-1$ soit $r'\geqslant r-2$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆