DM n° 12 (pour le 07/04/2012) PSI 11-12

Notations et rappels : Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et rg(A) son rang.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $<X, Y> \longmapsto {}^tXY$.

1ère Partie

A- Étude d'une matrice

Soit U un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \ldots, u_n$. On pose $M = U\,{}^tU$.

1. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice M à l'aide des u_k. Que vaut la trace de M ?

2. Exprimer les colonnes de M à l'aide de $u_1, \ldots, u_n$ et U.

3. Montrer alors que le rang de M est égal à 1.

4. Justifier que 0 est valeur propre de M et montrer que le sous-espace propre associé est égale à $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

5. Calculer le produit MU et en déduire que ${}^tUU$ est une autre valeur propre de M. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

6. Montrer que la matrice M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale D où

$$D = diag({}^tUU, 0, \ldots, 0).$$

B- Théorème de Courant–Fischer

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <,>)$ formée de vecteurs propres de f.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \quad \text{et} \quad f(e_i) = \lambda_i e_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$: $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $\mathcal{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont de dimension k.

Si v est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $\quad R_A(v) = \dfrac{<Av, v>}{<v, v>} = \dfrac{<f(v), v>}{<v, v>}.$

2. Calculer $R_A(e_k)$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Soit $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Exprimer les quantités $<f(v), v>$ et $<v, v>$ en fonction des x_k et λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. Montrer alors que $\quad \lambda_1 = \min_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $\quad \lambda_n = \max_{v \neq 0} R_A(v)$.

5. Soient $k \in \{1, \ldots, n\}$ et w un vecteur non nul de V_k. Montrer que $R_A(w) \leqslant \lambda_k$ et conclure que
$$\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v).$$

6. Soient $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $F_1 \in \mathcal{F}_k$.
   (a) Montrer que la dimension du sous-espace vectoriel $F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$ est $\geqslant 1$.
   (b) Soit w un vecteur non nul de $F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$. Montrer que $R_A(w) \geqslant \lambda_k$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\quad \lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right)$. (*Théorème de Courant-Fischer*)

7. (a) Montrer que l'application $\psi_A : v \longmapsto <Av, v>$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire la continuité de l'application R_A sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et conclure que l'image de l'application $R_A$est un intervalle.
   (c) Montrer alors que $\{R_A(v),\ v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ \} = [\lambda_1, \lambda_n]$

2ème Partie

On rappelle qu'une matrice B, symétrique réelle d'ordre n, est dite définie positive si pour tout vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait
$$^tXBX > 0.$$

1. Soit B une matrice symétrique réelle d'ordre n. Montrer que B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle d'ordre 2.
   (a) On suppose que A est définie positive ; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ${}^tXAX$ en fonction de $a,\ b,\ c,\ x$ et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive.

Le but de la suite de cette partie est d'étendre le résultat de cette question à n quelconque.

---

3. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n; on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A et on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f. Soient H un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et p la projection orthogonale sur H ; on note g l'endomorphisme induit par $p \circ f$ sur H.
   (a) Montrer que g est un endomorphisme autoadjoint de H.
   Soient alors $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ les valeurs propres de g.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\lambda_k \leqslant \mu_k$.
   (c) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
      i. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension $k+1$, le sous-espace vectoriel $F \cap H$ est de dimension $\geqslant k$.
      ii. Soit F comme à la question précédente et soit donc G un sous-espace vectoriel de $F \cap H$, de dimension k. Comparer $<g(v), v>$ et $<f(v), v>$, pour $v \in G$, et en déduire que $\displaystyle \max_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{<g(v), v>}{<v, v>} \leqslant \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{<f(v), v>}{<v, v>}$.
      iii. Conclure que $\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

4. On reprend les hypothèses de la question précédente et on écrit $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ {}^t b & \mu \end{pmatrix}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ et $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

   (a) Que représente la matrice A_{n-1} ? Justifier qu'elle est symétrique.

   (b) On note $\mu'_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu'_{n-1}$ les valeurs propres de la matrice A_{n-1}. Montrer que

   $$\lambda_1 \leqslant \mu'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu'_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

   (c) Conclure que si la matrice A est définie positive, il en est de même de la matrice A_{n-1}.

5. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_k = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$.

   (a) Montrer que si A est définie positive alors les déterminants des matrices A_k sont tous strictement positifs.

   (b) En utilisant le résultat de la question 4. précédente, montrer par récurrence sur n, que la réciproque de (a) est vraie.

6. **Un exemple d'utilisation** : On considère la matrice $M(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $t \in [0, 1]$.

   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive.

   (b) En déduire que la matrice $M_1 = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique définie positive. (*On remarquera que* $M_1 = \int_0^1 M(t)\, dt$).

3ème Partie

A- Une deuxième application

1. Soient A et A' deux matrices symétriques réelles d'ordre n. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ (resp. $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$) les valeurs propres de A (resp. A') ; on note aussi $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de la matrice $E = A' - A$.

   (a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

   $$\lambda_k + \mu_1 \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \mu_n.$$

   (b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\lambda'_k - \lambda_k| \leqslant \|A - A'\|$, où $\|.\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnée à la norme euclidienne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. En déduire que l'ensemble S_n^+ des matrices symétriques réelles d'ordre n et définies positives est un ouvert de l'espace vectoriel S_n des matrices symétriques réelles d'ordre n.

B- Une dernière application

Soient A une matrice symétrique réelle d'ordre n et U un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$ celles de la matrice $A_\varepsilon = A + \varepsilon M$ avec $M = U\,{}^tU$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

D'après la section **A-** de la première partie, il existe une matrice orthogonale R telle que

$${}^tRMR = \begin{pmatrix} {}^tUU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On décompose alors la matrice ${}^tRAR$ par blocs comme pour la matrice ${}^tRMR$ et on obtient

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & {}^ta \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ et $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La matrice A_{n-1} est évidement symétrique réelle, il existe donc une matrice orthogonale S, d'ordre $n-1$, et des réels $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$${}^tSA_{n-1}S = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

On pose enfin $Q = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice Q est orthogonale.

2. Montrer, en effectuant des produits par blocs, que

$$^t\!QAQ = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\!a\,S \\ {}^t\!S\,a & D_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\!QA_\varepsilon Q = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\,{}^t\!U\,U & {}^t\!a\,S \\ {}^t\!S\,a & D_{n-1} \end{pmatrix}$$

   avec $D_{n-1} = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

3. On suppose que $\varepsilon \geqslant 0$. Montrer en utilisant par exemple la question (A-1.) de cette partie que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \varepsilon\,{}^t\!U\,U.$$

4. On suppose ici que ε est quelconque et on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice Q.

   (a) Vérifier que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on désigne par $y_1, \ldots, y_n$ les composantes de X dans la base $(C_1, \ldots, C_n)$. Montrer alors que

$$^t\!XAX = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} \beta_j y_1 y_j,$$

   où $\beta_2, \ldots, \beta_n$ sont les composantes du vecteur ${}^t\!S\,a$ de $\mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$.

   (c) Écrire une relation analogue à la précédente et concernant la matrice A_ε, puis en déduire, lorsque X est non nul, que

$$R_{A_\varepsilon}(X) = R_A(X) + \varepsilon\,{}^t\!U\,U \frac{y_1^2}{<X, X>}.$$

   (d) En choisissant convenablement le X, montrer que $\lambda'_2 \geqslant \lambda_1$. On utilisera les formules $\lambda'_2 = \min\limits_{F \in \mathcal{F}_2} \big(\max\limits_{v \in F \setminus \{0\}} R_{A_\varepsilon}(v) \big)$ et $\lambda_1 = \min\limits_{v \neq 0} R_A(v)$.

FIN DE L'ÉPREUVE