CORRIGÉ DU DM n°2 (Mines-Ponts 2001)

PRÉLIMINAIRES

1°) $x \in \mathrm{Ker} f^k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker} f^{k+1}$
Donc $\underline{\mathrm{Ker} f^k \subset \mathrm{Ker} f^{k+1} \text{ pour tout entier naturel } k}$.

2°) Notons $\mathcal{H}_k$ la propriété : $\mathrm{Ker} f^k = \mathrm{Ker} f^{k+1}$.
$\mathcal{H}_p$ est vraie par hypothèse.
Si $\mathcal{H}_k$ est vérifiée, alors on a les équivalences :
$x \in \mathrm{Ker} f^{k+2} \iff f(x) \in \mathrm{Ker} f^{k+1} \iff f(x) \in \mathrm{Ker} f^k \iff x \in \mathrm{Ker} f^{k+1}$
qui entraînent $\mathcal{H}_{k+1}$.
Ainsi, par récurrence, $\underline{\mathrm{Ker} f^k = \mathrm{Ker} f^{k+1} \text{ pour tout } k \geqslant p}$.

Soit $d_k = \dim \mathrm{Ker} f^k$. (d_k) est une suite croissante majorée (par n) d'entiers naturels donc elle est constante à partir d'un certain rang p .
Elle est strictement croissante jusqu'à ce rang par contraposition du résultat précédent, et $d_0 = 0$, puis $d_1 > d_0 \Rightarrow d_1 \geqslant 1$ etc.. donc : $\forall k \leqslant p, \quad k \leqslant d_k \leqslant n$.

En particulier, $p \leqslant n$, donc $\underline{\mathrm{Ker} f^n = \mathrm{Ker} f^{n+1}}$.

3°) Si $u^q = 0$ alors $d_q = n$ donc $d_p = n$, avec p défini comme ci-dessus. Il existe donc $p \leqslant n$ tel que $u^p = 0$ (p s'appelle l'indice de nilpotence de u). En particulier, on a $u^n = 0$.

PREMIÈRE PARTIE

1°) **a)** g commute avec D_n car $D_n = g^2 - \lambda Id$ est un polynôme en g.
Les polynômes tels que leur dérivé $(p+1)$ème soit nul sont les polynômes de degré inférieur ou égal à p, donc $E_p = \mathrm{Ker} D^{p+1}$.
Puisque g commute avec D_n , il commute avec avec D_n^{p+1}, donc $E_p = \mathrm{Ker} D_n^{p+1}$ est stable par g (résultat du cours).
E_p étant stable par D et g, les endomorphismes induits g_p et D_p vérifient la même relation.
Rem : Noter que l'énoncé parle de restriction au lieu de parler d'endomorphismes induits...

b) De même que précédemment puisque D est un polynôme en g et $E_n = \mathrm{Ker} D^{n+1}$.

c) i)
• F est de dimension finie $(n+1)$, donc engendré par une famille finie $\mathcal{F}$ de polynômes. Étant finie, $\mathcal{F}$ est incluse dans un sous espace E_q donc $F \subset E_q$. Dans ce cas $D^{q+1}F = \{0\}$ donc l'endomorphisme induit D_F est nilpotent.

D_F est un endomorphisme nilpotent en dimension $n+1$ donc $D_F^{n+1} = 0$ (préliminaires question c).
Donc $D^{n+1}(F) = \{0\}$ donc F est inclus dans E_n et par l'égalité de leur dimension : $F = E_n$.

• Soit maintenant F un sous espace de dimension infinie. Alors F n'est inclus dans aucun E_n, donc pour tout entier n, il existe un polynôme P dans F de degré $m \geqslant n$. Si de plus

F est stable par D, F contient P,$D(P),\ldots,D^m(P)$, famille engendrant E_m car échelonnée en degrés de 0 à m. Ainsi F contient tous les E_n donc $F = E$.

• En conclusion, les sous espaces stables par D sont E,$\{0\}$ et les E_n.

ii)
Puisque D est un polynôme en g, tout sous espace G stable par g est stable par D.

Réciproquement, si G est stable par D alors, d'après la question précédente, G est égal à E,$\{0\}$ ou à E_n, donc G est stable par g d'après la question I.1.a)

2°) **a)** $\dim E_0 = 1$ et $D_0 = 0$. De plus, si g est un endomorphisme de E_0, c'est nécessairement une homothétie. Si γ est son rapport, la relation $g^2 = \lambda Id + D_0$ se traduit par $\gamma^2 = \lambda$, ce qui impose $\lambda \geqslant 0$.

b) L'une ou l'autre des existences de g entraîne (d'après I.1.a) l'existence de g_0 dans les conditions précédentes, donc $\lambda \geqslant 0$. D'où le résultat par contraposition.

3°) **a)** $f^n \neq 0$ donc il existe y tel que $f^n(y) \neq 0$. Montrons que $B = (f^n(y),f^{n-1}(y),\ldots,y)$ est libre : si $a_n f^n(y) + \cdots + a_0 y = 0$, alors en appliquant f^{n-k} et compte tenu de $f^p = 0$ pour $p > n$, il vient $a_k f^n(y) + \cdots + a_0 f^{n-k}(y) = 0$. Comme $f^n(y) \neq 0$, on en déduit successivement (pour k variant de 0 à n) $a_0 = 0$, $a_1 = 0,\ldots,$ $a_n = 0$. B est libre.
Ayant $n+1$ éléments, B est une base de V et

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} = A_0.$$

b) Puisque $D_n^{n+1} = 0$ et $D_n^n(X^n) = n! \neq 0$, l'existence de B_n découle de la question précédente.
Dans cette base, la matrice de $\lambda Id + D_n$ est $A_0 + \lambda I_n$ soit A_λ.

4°) **a)** Soit h un endomorphisme de E_2 qui commute avec D_2. Avec les notations précédentes, $h(y)$ se décompose sur la base B_2 en :

$$h(y) = ay + bD_2(y) + cD_2^2(y).$$

Puisque h et D_2 commutent, alors h et D_2^2 commutent également et pour $k = 0,1,2$:
$h(D_2^k(y)) = D_2^k(h(y)) = aD_2^k(y) + bD_2^{k+1}(y) + cD_2^{k+2}(y) = (aId + bD_2 + cD_2^2)(D_2^k(y))$.
Donc $h = aId + bD_2 + cD_2^2$, puisque ces deux endomorphismes coincident sur la base B_2.
La réciproque est immédiate, puisque tout polynôme en D_2 commute avec D_2.

b) D'après I.1.a) et le résultat précédent, nécessairement $g = aId + bD_2 + cD_2^2$.
On a alors $g^2 = P^2(D) = a^2 Id + 2abD_2 + (2ac + b^2)D_2^2$, puisque $D_2^3 = D_2^4 = 0$.

Enfin (Id,D_2,D_2^2) est libre puisque B_2 est libre donc $g^2 = \lambda Id + D$ équivaut à
$a^2 = \lambda$, $2ab = 1$, $2ac + b^2 = 0$.
Ce dernier système n'a de solutions que si $\lambda > 0$ (*Rem: l'énoncé n'était pas clair sur ce point*) et dans ce cas :

$$a = \pm\sqrt{\lambda}, \quad b = \frac{1}{2a}, \quad c = -\frac{1}{8a^3}.$$

Ainsi les solutions de $G^2 = A_1$ sont $G = \pm(I_2 + \frac{1}{2}A_0 - \frac{1}{8}A_0^2)$.

DEUXIÈME PARTIE

1°) **a)** Si $g^2 = D_n$ alors $g^{2n+2} = 0$ donc g est nilpotent.
De plus $g^2 \neq 0$ donc d'après le préliminaire b) on a $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}g \subsetneq \mathrm{Ker}g^2$ d'où $\dim \mathrm{Ker}g^2 \geqslant 2$.

b) Or $\mathrm{Ker}g^2 = \mathrm{Ker}D_n = E_0$ qui est de dimension 1 ce qui contredit le résultat précédent : g n'existe pas.

c) Si $g^2 = D$ alors par I.1.a, E_n est stable par g et il existe g_n tel que $g_n^2 = D_n$ ce qui est impossible.

2°) **a)** Les primitives d'un polynôme sont des polynômes donc D est surjective.
Ainsi $D(E) = E$ puis pour tout m, $D^m(E) = E$ et $g(g^{k-1}(E)) = D^m(E) = E$ donc g est surjective.

b) $\forall q \leqslant k, \quad \mathrm{Ker}g^q \subset \mathrm{Ker}g^k = \mathrm{Ker}D^m = E_{m-1}$.
Donc $\mathrm{Ker}g^q$ est de dimension finie pour $0 \leqslant q \leqslant k$.

c) $\forall P \in \mathrm{Ker}g^p, \quad g^{p-1}(\Phi(P)) = g^p(P) = 0$.
Ainsi Φ est une application de $\mathrm{Ker}g^p$ dans $\mathrm{Ker}g^{p-1}$, linéaire comme g.
Noyau de Φ : $\mathrm{Ker}\Phi = \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Ker}g^p = \mathrm{Ker}g$
Image de Φ : soit $P \in \mathrm{Ker}g^{p-1}$, il existe $Q \in E$ tel que $g(Q) = P$ (g est surjective) et $g^p(Q) = g^{p-1}(P) = 0$ donc Q est élément de $\mathrm{Ker}g^p$ ce qui permet d'écrire $\Phi(Q) = P$. D'où $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Ker}g^{p-1}$.

D'après le théorème du rang :
$\dim \mathrm{Ker}\Phi + \dim \mathrm{Im}\Phi = \dim \mathrm{Ker}g^p$ soit $\dim \mathrm{Ker}g + \dim \mathrm{Ker}g^{p-1} = \dim \mathrm{Ker}g^p$.
Il en résulte facilement par récurrence (finie) : $\dim \mathrm{Ker}g^p = p \dim \mathrm{Ker}g$ pour tout $p \in [\![0,k]\!]$.

d) $\dim \mathrm{Ker}D^m = \dim E_{m-1} = m$ et $g^k = D^m$ donc $k \dim \mathrm{Ker}g = m$ et m est un multiple de k.
Réciproquement, si $m = pk$ il suffit de prendre $g = D^p$.
D'où la condition nécessaire et suffisante : m est un multiple de k.
Cette condition n'était pas remplie dans le cas II-1.c car alors $m = 1$ et $k = 2$.

TROISIÈME PARTIE :

1°) **a)**
$$\begin{aligned}(I_{n+1} + tD_n)\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k\Big) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k - (-1)^{k+1} t^{k+1} D_n^{k+1} \\ &= I_{n+1} - (-1)^{n+1} t^{n+1} D_n^{n+1} \qquad \text{(télescopage)} \\ &= I_{n+1} \qquad (D_n^{n+1} = 0)\end{aligned}$$

Donc la matrice carrée $I_{n+1}+tD_n$ est inversible et son inverse, que l'on notera simplement $Q(t)$ pour la suite, est définie par :

$$Q(t) = (I + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k.$$

b) L'expression précédente prouve que $t \mapsto Q(t)$ est dérivable et commute à D_n.
En dérivant l'égalité $Q(t)(I_{n+1} + tD_n) = I_{n+1}$ vraie pour tout t, il vient :
$Q'(t)(I + tD_n) + Q(t)D_n = 0$ soit $Q'(t) = -Q(t)D_nQ(t) = -Q(t)^2D_n$.

c) $L_n(t) = D_nP(D_n) = P(D_n)D_n$, où P est un polynôme. Donc $L_n(t)^{n+1} = D_n^{n+1}P^{n+1}(D_n) = 0$ puisque $D_n^{n+1} = 0$.

d) Quitte à ajouter un terme nul à la somme définissant L_n, on obtient :
$L_n'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}t^{k-1}D_n^k = D_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k = D_nQ(t).$
Comme $L_n(t)$ et $L_n'(t)$ commutent (polynômes en D_n), on a :

$$\frac{d}{dt}L_n^k(t) = kL_n'(t)L_n^{k-1}(t) = kL_n^{k-1}(t)D_nQ(t).$$

2°) **a)**
$$\begin{aligned}
\varphi_u(t)\varphi_v(t) &= \sum_{p=0}^{n}\frac{u^p}{p!}(L_n(t))^p\sum_{q=0}^{n}\frac{v^q}{q!}(L_n(t))^q\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}L_n(t)^{p+q}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}\right)L_n(t)^k \quad \text{nilpotence de } L_n(t)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{u^pv^{k-p}}{p!(k-p)!}\right)L_n(t)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^pv^{k-p}\frac{1}{k!}\right)L_n(t)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(u+v)^k}{k!}L_n(t)^k\\
&= \varphi_{u+v}(t)
\end{aligned}$$

b) $t \mapsto \varphi_u(t)$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.
En utilisant III-1.d :
$$\begin{aligned}
\varphi_u'(t) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{u^k}{k!}kQ(t)D_nL_n^{k-1}(t)\\
&= uQ(t)D_n\sum_{k=1}^{n}\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}L_n^{k-1}(t)\\
&= uQ(t)D_n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^k}{k!}L_n^k(t)\\
&= uQ(t)D_n\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}L_n^k(t) \quad (D_nL_n^n(t) = 0)\\
&= uQ(t)D_n\varphi_u(t)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi_u'(t) = uQ(t)D_n\varphi_u(t).$$

c) φ_1' est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :
$\varphi_1''(t) = Q'(t)D_n\varphi_1(t) + Q(t)D_n\varphi_1'(t) = -Q(t)D_nQ(t)D_n\varphi_1(t) + Q(t)D_nQ(t)D_n\varphi_1(t) = 0$
Ainsi $\varphi_1''(t) = 0$ pour tout réel t ; par conséquent $\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t\varphi_1'(0)$.
Comme $L_n(0) = 0$ on déduit $\varphi_1(0) = I_{n+1}$ et $\varphi_1'(0) = D_n\varphi_n(0) = D_n$ et l'on conclut :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n.$$

3°) **a)** $\lambda I_{n+1} + D_n = \lambda(I_{n+1} + \dfrac{1}{\lambda}D_n) = \lambda\varphi_1(\dfrac{1}{\lambda}) = \lambda(\varphi_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{\lambda}))^2 = \left(\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{\lambda})\right)^2$
Ce qui prouve l'existence de $M = \pm\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{\lambda})$ donc de g pour $\lambda > 0$.

b) Pour $\lambda = 1$ et $n = 2$ il vient $L_n(1/\lambda) = L_2(1) = D_2 - \frac{1}{2}D_2^2$ puis
$\varphi_{\frac{1}{2}}(1) = I + \frac{1}{2}L_2(1) + \frac{1}{8}L_2^2(1) = I + \frac{1}{2}(D_2 - \frac{1}{2}D_2^2) + \frac{1}{8}D_2^2 = I + \frac{1}{2}D_2 - \frac{1}{8}D_2^2$
On retrouve bien les matrices G puisque $A_0 = D_2$ avec les notations de l'énoncé.

QUATRIÈME PARTIE :

1°) **a)** h vérifie sur $]-1,+\infty[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1+x)y' = \frac{1}{2}y$$

b) • On commence par chercher une solution y de l'équation différentielle précédente, telle que $y(0) = 1$, qui soit développable en série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Donc $y(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} b_px^p$ pour $x \in]-R,R[$, avec $b_0 = 1$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $(1+x)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pb_px^{p-1} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} b_px^p$ d'où : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(p+1)b_{p+1}x^p + \sum_{p=0}^{+\infty}\left(p - \frac{1}{2}\right)b_px^p = 0$ puis la relation de récurrence :

$$\forall p \geqslant 1 \ , \ b_{p+1} = \frac{\frac{1}{2} - p}{p+1}b_p$$

On en déduit, en posant $a = 1/2$, $b_0 = 1$ et $b_p = \dfrac{a(a-1)\cdots(a-p+1)}{p!}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

• Réciproquement, avec ces notations, la série entière $\sum b_px^p$ a un rayon de convergence égal à 1, puisque $\dfrac{b_{p+1}}{b_p} = \dfrac{a-p}{p+1}$ tend vers -1 quand p tend vers l'infini. Et dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ sa somme S est solution de l'équation différentielle (en remontant les calculs précédents) et vérifie $S(0) = 1 = h(0)$.
En vertu de l'unicité des solutions du problème de Cauchy, $h(x) = S(x)$ sur $]-1,1[$.

c) c_n est le coefficient de x^n dans le développement en série entière du produit
$h(x)h(x) = 1 + x$.
Donc $c_0 = c_1 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geqslant 2$.

2°) **a)** Soit $P \in E$ et n un majorant de son degré.

Alors $D^p(P) = 0$ pour $p > n$ donc $T(P) = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(P)$ qui est bien un polynôme.

Étant clairement linéaire (prendre n pour majorant commun du degré de P et de Q lorsqu'on calcule $T(\alpha P + Q)$), T est un endomorphisme de E qui, d'après le calcul précédent, laisse stable les sous espaces E_n.

b) En notant T_n l'endomorphisme induit par T sur E_n on a pour $P \in E_n$: $T^2(P) = T_n^2(P)$.

Or $T_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$ ce qui conduit, compte tenu de $D_n^k = 0$ pour $k > n$ à :

$$T_n^2 = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p \sum_{q=0}^{n} \frac{b_q}{\lambda^q} D_n^q = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k}^{n} \frac{b_p b_q}{\lambda^{p+q}} D_n^{p+q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\lambda^k} D_n^k = I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n$$

Ainsi $T^2(P) = P + \frac{1}{\lambda} DP$ et finalement : $T^2 = Id + \frac{1}{\lambda} D$.

c) $g = \pm\sqrt{\lambda} T$ convient . $(\lambda > 0)$

d) Et $g_n = \pm\sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$.

Dans le cas I-4, $n = 2$ et $\lambda = 1$.

Donc $g_2 = \pm(b_0 I + b_1 D_2 + b_2 D_2^2)$ avec $b_0 = 1$,$b_1 = \frac{1}{2}$,$b_2 = -\frac{1}{8}$ ce qui redonne les matrices précédentes.
