CORRIGÉ DM N°9 CCP MP 1997 PC

I. 1) – Si f est inversible à gauche, elle est injective donc bijective (cf. cours).

– $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe des permutations (=bijections) de $\mathbb{R}^n$ pour la loi $\circ$. (cf. cours).

2) 2.1. – Soit f telle que $\|f\| < 1$. Si $\mathrm{I}_n - f$ n'était pas injective, il existerait $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $(\mathrm{I}_n - f)(x) = 0$ soit $f(x) = x$, ce qui est impossible car, compte tenu de la définition de la norme subordonnée, on doit avoir $\|f(x)\|_2 \leqslant \|f\| \cdot \|x\|_2$ pour tout x

Ainsi $\mathrm{I}_n - f$ est un endomorphisme injectif, donc bijectif.

– Par définition de la norme subordonnée, on a $\|f \circ g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ pour tous endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^n$ (cf. cours). On en déduit par récurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\|f^i\| \leqslant \|f\|^i$, cela restant vrai pour $i = 0$.

Puisque $\|f\| < 1$, la série géométrique $\sum\limits_{i \geqslant 0} \|f\|^i$ converge ; par comparaison, la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} \|f^i\|$ converge donc aussi, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} f^i$ est absolument convergente, donc convergente (car $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ étant de dimension finie est complet). Notons $\mathrm{S} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}$ sa somme.

– En notant $\mathrm{S}_p = \sum\limits_{i=0}^{p} f^i$ les sommes partielles de cette série, on a $(\mathrm{I}_n - f) \circ \mathrm{S}_p = \mathrm{I}_n - f^{p+1}$ $(*)$ par télescopage. Or quand $p \to +\infty$, $(\mathrm{I}_n - f) \circ \mathrm{S}_p$ converge vers $(\mathrm{I}_n - f) \circ \mathrm{S}$ par continuité de l'application linéaire $g \mapsto (\mathrm{I}_n - f) \circ g$, et f^{p+1} tend vers 0 puisque $\|f^{p+1}\| \leqslant \|f\|^{p+1}$ avec $\|f\| < 1$.

Il résulte donc de $(*)$, par passage à la limite : $(\mathrm{I}_n - f) \circ \mathrm{S} = \mathrm{I}_n$. $\mathrm{I}_n - f$ est donc inversible (on l'avait déjà démontré d'une autre manière), et $(\mathrm{I}_n - f)^{-1} = \mathrm{S}$.

2.2. – $\|f_1 \circ \ldots \circ f_p\| \leqslant \|f_1\| \ldots \|f_p\|$ se démontre par récurrence sur p compte tenu de la propriété de la norme subordonnée déjà rappelée.

– Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))^p & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathrm{R}^n) \\ (f_1, \ldots, f_p) & \longmapsto & f_1 \circ \cdots \circ f_p \end{array} \right.$. On a, φ étant multilinéaire :

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1 + h_1, f_2 + h_2, \ldots, f_p + h_p) &= \varphi(f_1, f_2 + h_2, \ldots, f_p + h_p) + \varphi(h_1, f_2 + h_2, \ldots, f_p + h_p) \\
&= \varphi(f_1, f_2, f_3 + h_3, \ldots, f_p + h_p) + \varphi(f_1, h_2, \ldots, f_p + h_p) + \varphi(h_1, f_2 + h_2, \ldots, f_p + h_p) \\
&= \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_p) + \ldots
\end{aligned}$$

où les termes dans $\ldots$ sont tous majorés, en norme, par $\max(\|h_i\|)\max(\|h_i\| + \|f_i\|)$ d'après l'inégalité précédente.

Donc $\lim\limits_{(h_1, \ldots, h_p) \to (0, \ldots, 0)} \varphi(f_1 + h_1, f_2 + h_2, \ldots, f_p + h_p) = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, ce qui signifie que φ est continue (cf. aussi cours sur les applications multilinéaires continues).

2.3. a) Puisque $\|-f^{-1} \circ g\| \leqslant \|f^{-1}\| \cdot \|g\| < 1$, il résulte de la question 2.1 que $\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g$ est inversible donc $f + g = f \circ (\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g)$ l'est aussi.

b) Toujours d'après la question 2.1, on a : $(\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} (-1)^i (f^{-1} \circ g)^i$ donc

$(\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g)^{-1} - \mathrm{I}_n = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} (-1)^i (f^{-1} \circ g)^i$ puis

$$\|(\mathrm{I}_n + f^{-1} \circ g)^{-1} - \mathrm{I}_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \|(f^{-1} \circ g)^i\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} (\|f^{-1}\| \|g\|)^i = \frac{\|f^{-1}\| \|g\|}{1 - \|f^{-1}\| \|g\|}$$

Compte tenu de la relation de l'énoncé (facile à vérifier), on aura donc

$$\|(f + g)^{-1} - f^{-1}\| \leqslant \frac{\|f^{-1}\| \|g\|}{1 - \|f^{-1}\| \|g\|} \|f^{-1}\|$$

d'où $\lim\limits_{g \to 0} (f + g)^{-1} = f^{-1}$ ce qui exprime bien la continuité de l'application $f \mapsto f^{-1}$.

3) **3.1.** D'après la formule du cours Det(M) est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice M donc est continue. Et puisque $\det = \mathrm{Det} \circ \mathscr{M}$ avec $\mathscr{M}$ application linéaire continue, il en est de même de $\det$.

3.2. $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : \det(f) > 0\}$ est donc l'image réciproque par l'application continue det de l'ouvert $]0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$. D'après un théorème du cours, c'est un ouvert de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ etc...

4) $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n)$ est non vide car il contient $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. D'après les propriétés de déterminants, il est clair que si f et g appartiennent à $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n)$, il en est de même de $f \circ g^{-1}$. C'est donc bien un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \circ)$.

$\mathrm{GL}_-(\mathbb{R}^n)$ ne peut être un sous-groupes $(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \circ)$, puisqu'il ne contient même pas $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

5) **5.1.** $u(t) = \chi_f(-t)$ où χ_f est le polynôme caractéristique de f ; c'est donc bien un polynôme de degré n en t.

5.2. Les racines d'un polynôme sont en nombre fini. Donc, si $u(0) = 0$, on peut trouver un intervalle $]0, \alpha[$ où il n'y a pas de racine, et si $u(0) \neq 0$, il en est de même mais cette fois-ci grâce à la continuité de u.

Ainsi, la suite d'endomorphismes $f_n = f + \dfrac{\alpha}{n}\mathrm{I}_n$ $(n \geqslant 2)$ est une suite d'endomorphismes tous bijectifs qui converge vers f. Tout élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est donc limite d'une suit d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ce qui veut bien dire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

II. **1)** Soit $(\mathrm{E}_{i,j})$ la base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\mathrm{M} = \sum_{k,l} m_{k,l}\mathrm{E}_{k,l}$ une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

On calcule :

$$\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{M} = \sum_{k,l} m_{k,l}\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,l} = \sum_{k,l} \delta_{jk} m_{k,l}\mathrm{E}_{i,l} = \sum_{j} m_{j,l}\mathrm{E}_{i,l}$$

donc la matrice $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{M}$ est la matrice où toutes les lignes sont nulles sauf la i-ème qui contient la j-ème ligne de M.

Donc :

- puisque $\mathrm{A}_{1,k,\lambda} = \mathrm{J}_n + (\lambda - 1)\mathrm{E}_i i$, faire le produit $\mathrm{A}_{1,k,\lambda}\mathrm{M}$ revient à multiplier la i-ème ligne de M par λ.
- puisque $\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda} = \mathrm{J}_n + \lambda\mathrm{E}_{k,p}$, faire le produit $\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda}\mathrm{M}$ revient à faire l'opération $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k + \lambda\mathrm{L}_p$.
- puisque $\mathrm{A}_{3,k,p} = \mathrm{J}_n - \mathrm{E}_{k,k} - \mathrm{E}_{p,p} + \mathrm{E}_{k,p} + \mathrm{E}_{p,k}$, faire le produit $\mathrm{A}_{3,k,p}\mathrm{M}$ revient à faire l'échange des lignes L_k et L_p.

2)
- Les déterminants demandés valent successivement λ, 1 et -1 (pour le dernier, on fait juste une transposition pour se ramener à J_n), donc sont non nuls.
- L'inverse de $\mathrm{A}_{1,k,\lambda}$ est $\mathrm{A}_{1,k,1/\lambda}$ (inverse d'une matrice diagonale) , l'inverse de $\mathrm{A}_{2,k,p,\lambda}$ est $\mathrm{A}_{2,k,p,-\lambda}$ puisque $(\mathrm{J}_n + \lambda\mathrm{E}_{k,p})(\mathrm{J}_n - \lambda\mathrm{E}_{k,p}) = \mathrm{J}_n^2 - \lambda^2 \underbrace{\mathrm{E}_{k,p}\mathrm{E}_{p,k}}_{=0 \text{ car } k\neq p} = \mathrm{J}_n$ et enfin $\mathrm{A}_{3,k,p}$ est sa propre inverse (matrice d'une application linéaire telle que $u(e_k) = e_p$ et $u(e_p) = e_k$ donc $u^2 = \mathrm{Id}$).
- N est L-équivalente à M si et seulement si il existe un produit fini B de matrices de type $\mathrm{A}_{\dots}$, tel que $\mathrm{N} = \mathrm{BM}$; si c'est le cas, $\mathrm{M} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$ et B^{-1} est un produit fini de matrices du même type d'après la question précédente.
  Ceci assure la symétrie de la relation ; la réflexivité s'obtient en prenant par exemple $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{1,1,1}$, et la transitivité est immédiate.
  La fin découle la structure de groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) **3.1.** Il suffit de multiplier la $m(k)$-ième ligne par $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_{m(k),p(m(k))}}$ ce qui est une opération de type 1 (multiplication par $\mathrm{A}_{1,m(k),\lambda}$) et donne le résultat voulu.

3.2. Pour tout indice $i \neq m(k)$, on prend $\lambda_i = -a_{i,p(m(k))}$. Multiplier $\mathrm{M}'(k)$ par $\mathrm{A}_{2,i,m(k),\lambda_i}$ revient à faire les opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - a_{i,p(m(k))}\mathrm{L}_{m(k)}$, donc à mettre des zéros dans la colonne $p(m(k)$ dans chacune de ces lignes. On vérifie ensuite que puisque $\mathrm{M}'(k)$ vérifiait $\mathrm{P}(k)$, la matrice obtenue vérifie $\mathrm{P}(m(k))$ (la où il y avait une colonne avec un 1 et des zéros, rien n'a changé puisque le coefficient de cette colonne sur la ligne $m(k)$ était nul).

Cela permet donc de faire une récurrence (l'initialisation est immédiate en commençant à $k = 0$), puisque $m(k) \geqslant k + 1$.

3.3. $b_{m,j} = \dfrac{a_{m,j}}{a_{m,p(m)}}$ (pour mettre le coefficient à 1) et, pour tout $i \neq m$, $b_{i,j} = a_{i,j} - \dfrac{a_{m,j}a_{i,p(m)}}{a_{m,p(m)}}$ (pour mettre des zéros dans la colonne $p(m)$).

3.4. – Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui est L-réduite.

M n'a pas de ligne nulle, donc $p(i)$ est défini pour tout i. L'application p est injective : en effet, si $p(i) = p(j)$ avec $i < j$, la $p(i)$-ème colonne contient un 1 à la place j, c'est exclu. Donc p est bijective, c'est une permutation de $1,...,n$.

Il y a donc dans M, par colonne, exactement un 1 et des zéros ailleurs ; c'est aussi vrai par ligne, car chaque place sur la ligne autre qu'à l'entrée principale est en regard d'une entrée principale d'une autre ligne. Ainsi, M est une matrice de permutation σ. M représente donc une application linéaire qui transforme la base $(e_1,\dots,e_n)$ en la base $e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$. En écrivant cette permutation comme produit de transposition, on peut donc écrire M comme produit de matrices de la forme $\mathrm{A}_{3,k,p}$.

– Toute matrice produit d'éléments de $\mathscr{E}l(n)$ est évidemment inversible.

Réciproquement, si M est inversible, elle est L-équivalente à une matrice L-réduite inversible, elle même produit de matrices de transpositions comme on vient de le voir. Donc M est bien un produit d'éléments de $\mathscr{E}l(n)$.

III. A.

1) Découle directement de $\det \mathrm{M} = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \det \mathrm{B}_i > 0$.

2) **2.1.** La matrice $\varphi(t) = \mathrm{A}_{1,k,(1-t)\lambda+t}$ a tous ses coefficients qui sont des fonctions continues de t donc φ est continue (th. du cours sur les applications continues à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, que l'on utilisera dans toute la suite). De plus, $\det\varphi(t) = (1-t)\lambda + t > 0$ car $\lambda > 0$ et $t \in [0,1]$. Et on a $\varphi(0) = \mathrm{A}_{1,k,\lambda}$ et $\varphi(1) = \mathrm{J}_n$.

2.2. Même principe. Ici, $\psi(0) = \mathrm{A}_{1,k,\lambda}$ et $\psi(1) = \mathrm{A}_{1,k,-1}$.

3) Même principe. Ici, le chemin relie $\chi(0) = \mathrm{A}_{2,k,p,\lambda}$ à $\chi(1) = \mathrm{A}_{2,k,p,0} = \mathrm{J}_n$ et toutes les matrices $\chi(t)$ sont de déterminant 1.

4) La matrice $\omega(t)$ est
$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & & & & & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \dots & -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \dots & \dots & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \dots & 0\\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \dots & \dots & \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & & 0\\
 & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}$$
(lignes et colonnes de numéros k et p). Les coefficients sont des fonctions continues de t donc ω est continue. $\omega(0) = \mathrm{A}_{3,k,p}$ et $\omega(1) = \mathrm{A}_{1,k,-1}$. Enfin $\det(\omega(t)) = -1$, en faisant un calcul par blocs après un échange d'une ligne et d'une colonne.

5) On a $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_{n+}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{M} = \mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2 \times \dots \times \mathrm{B}_m$ et les B_i dans $\mathscr{E}l(n)$.

Pour tout i il existe une application continue α_i de $[0,1]$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\alpha_i(0) = \mathrm{B}_i$ et $\alpha_i(1)$ qui est soit J_n soit une matrice de la forme $\mathrm{A}_{1,k,-1}$.

Si on pose $\sigma(t) = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \alpha_i(t)$, σ sera une application continue de $[0,1]$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, telle que $\sigma(0) = \mathrm{M}$ et $\sigma(1)$ produit de matrices de la forme $\mathrm{A}_{1,k,-1}$, donc diagonale avec des ± 1 sur la diagonale.
L'application $\det\circ\sigma$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et étant continue garde toujours le même signe donc $\det\sigma(1) = \det \mathrm{M} > 0$, donc le nombre de -1 sur la diagonale est pair.

6) C'est toujours pareil... $\mathrm{N}_{p,k}$ est une matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale sauf lignes p et k où on trouve -1. Le chemin ρ la relie à J_n et les matrices $\rho(t)$ ont toutes un déterminant égal à $+1$ (même démonstration que pour ω).

7) – Notons déjà que, dans un espace vectoriel normé E, s'il existe un chemin γ qui relie a à b et un chemin γ' qui relie b à c, on peut construire un chemin δ qui relie a à b.

En effet, il suffit de prendre δ telle que $\begin{cases} \delta(t) = \gamma(2t) & \text{si } t \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \delta(t) = \gamma'(2t-1) & \text{si} t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$.

On peut donc mettre « bout à bout » deux chemins pour en faire un autre et par récurrence, on peut en mettre ainsi un nombre quelconque bout à bout.

- Soit donc $M \in GL_{n+}(\mathbb{R})$. On a déjà trouvé un chemin qui relie M à une matrice diagonale avec des ± 1 sur la diagonale, le nombre de -1 étant pair. Si cette matrice est J_n, c'est fini. Sinon, on considère un chemin du type ρ qui va transformer une paire de -1 en une paire de 1 etc... jusqu'à obtenir J_n, puis on met tous ces chemins bout à bout.
- On a ainsi joint toute matrice M de $GL_{n+}(\mathbb{R})$ à J_n par un chemin. On peut, en considérant le chemin « inverse » ($\gamma(1-t)$ au lieu de $\gamma(t)$) joindre J_n à toute matrice M' de $GL_{n+}(\mathbb{R})$. En mettant ces chemins bout à bout, on peut ainsi relier toute matrice M de $GL_{n+}(\mathbb{R})$ à toute autre matrice M' de $GL_{n+}(\mathbb{R})$ par un chemin continu, donc $GL_{n+}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

B.

C'est presque pareil. La seule différence est qu'on arrive à une matrice diagonale avec des ± 1 sur la diagonale, le nombre de -1 étant impair, puis avec des chemins de type ρ, on arrive à joindre toute matrice $M \in GL_{n-}(\mathbb{R})$ à une matrice de type $A_{1,k,-1}$. Or on peut passer par un chemin continu d'une matrice de type $A_{1,k,-1}$ à une matrice $A_{3,k,1}$ par un chemin de la forme ω^{-1}. Enfin, on peut passer de $A_{3,k,1} = A_{3,1,k}$ à $A_{1,1,-1}$ par un chemin du type ω.

En mettant tous ces chemins bout à bout, on trouve un chemin continu ν qui relie $M \in GL_{n-}(\mathbb{R})$ à la matrice $A_{1,1,-1}$. Puis on conclut comme dans la question précédente.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆