CORRIGÉ DM N°5 : RACINES CARRÉES D'UN ENDOMORPHISME
(CCP PC 2010)

Partie I

A) 1) Calculons le polynôme caractéristique de A (donc aussi de f) :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) = \{0,1,4\}$; f, endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3, possède 3 valeurs propres distinctes, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

2) L'étude des sous-espaces propres donne :
$E_0(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,-2,0)$,
$E_1(f) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1,0,1)$,
$E_4(f) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,-1,0)$.

Puisque $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = 4v_3$, la matrice D de f dans la base (v_1,v_2,v_3) est : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3) La formule de changement de base donne : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, et donc $\boxed{A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}}$.

4) En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4^m & 4^m & 1-2\cdot 4^m \\ -2\cdot 4^m & -4^m & 2\cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A titre de vérification des calculs, on peut remarquer que, pour $m = 1$, on retrouve bien la matrice A).

5) Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ une matrice qui commute avec D. Un calcul simple montre que le système obtenu en écrivant $MD = DM$ équivaut à $m_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Ainsi, $\boxed{\text{les matrices qui commutent avec } D \text{ sont les matrices diagonales}}$.

6) On a $HD = DH = H^3$, donc $\boxed{H \text{ et } D \text{ commutent}}$.

7) D'après les questions 5) et 6), si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne alors :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \text{ (ce qui fournit 4 solutions).}$$

Ainsi, si h est un endomorphisme tel que $h^2 = f$, sa matrice dans la base (v_1,v_2,v_3) est de la forme précédente ; pour obtenir sa matrice dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices dans la base canonique des solutions h sont données par

$P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\boxed{\pm\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

B) 1) On trouve pour tout entier $m \geqslant 1$: $\boxed{J^m = 3^{m-1}J}$ (récurrence immédiate).

2) On a $A = J + I_3$. Comme J et I_3 commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1}\right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J.$$

Si on revient aux endomorphismes, cela donne : $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j}$.
Cette relation est encore valable pour $m = 0$ (car dans ce cas, elle s'écrit $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$).

3) Un calcul du polynôme caractéristique de A donne : $\chi_f(X) = \chi_A(X) = -(X-1)^2(X-4)$. Donc $\boxed{f \text{ admet les deux valeurs propres } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$.

4) D'après la question 2), on peut écrire $f^m = 1^m(\mathrm{Id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$ pour tout entier $m \geqslant 0$. En posant $p = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, on obtient $\boxed{\text{l'existence de la décomposition voulue}}$.

De plus, on a nécessairement $\mathrm{Id} = p + q$ (pour $m = 0$) et $f = p + 4q$ (pour $m = 1$). Donc $p = \frac{1}{3}(4\mathrm{Id} - f)$ et $q = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$, d'où $\boxed{\text{l'unicité de cette décomposition}}$.

Enfin, comme Id et j sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour p et q.

5) On obtient, en utilisant les expressions de p et q trouvées à la question précédente :

$$p^2 = p,\ q^2 = q,\ p \circ q = q \circ p = 0.$$

Soit maintenant $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$ tel que $h^2 = f$. D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme (p,q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$.
Donc il y a 4 endomorphismes h solutions, donnés par : $\boxed{h = \pm p \pm 2q}$.

6) On détermine les sous-espaces propres de f :
$E_1(f)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$, soit $E_1(f) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1,-1,0)$ et $w_2 = (0,1,-1)$, et $E_4(f) = \mathrm{Vect}(w_3)$ avec $w_3 = (1,1,1)$.
Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

Et $\boxed{(w_1, w_2, w_3) \text{ est une base de vecteurs propres pour } f}$.

Notons $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$. Alors :$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, et, puisque $p = \frac{1}{3}(4\mathrm{Id} - f)$ et $q = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$, on en déduit

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*Rem :* A l'aide de ces expressions matricielles, on remarque que p est la projection sur $E_1(f)$ parallèlement à $E_4(f)$, et que q est la projection sur $E_4(f)$ parallèlement à $E_1(f)$. L'écriture $f = \lambda p + \mu q$ n'est rien d'autre que la *décomposition spectrale* de f vue en classe...)

7) On peut prendre par exemple : $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est Y. Alors $\boxed{h^2 = f}$ car $Y^2 = D$. Et $\boxed{h \text{ n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q}$, car Y n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base $\mathcal{B}'$.

9) Soit h tel que $h^2 = f$. Comme f est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 1 et 4, le polynôme $Q_1(X) = (X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur de f, donc de h^2.
Donc le polynôme $Q_2(X) = (X^2-1)(X^2-4) = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de h. Or ce polynôme est scindé à racines simples, donc d'après le cours, $\boxed{h \text{ est diagonalisable}}$.

Partie II

1) On a, en utilisant les trois relations, $(f - \lambda \mathrm{Id}) \circ (f - \mu \mathrm{Id}) = f^2 - (\lambda+\mu) f + (\lambda\mu)\mathrm{Id} = 0$. Donc $(X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur de f, scindé à racines simples. Et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

2) A la question précédente, on a trouvé un polynôme annulateur de f qui n'a que λ et μ comme racines. Il en résulte que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda, \mu\}$.

Si μ n'est pas valeur propre de f, la seule valeur propre est donc λ. Comme f est diagonalisable, on a donc $f = \lambda \mathrm{Id}$. En utilisant les deux premières relations de l'énoncé, on a donc :

$$\lambda \mathrm{Id} = \lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q.$$

D'où $(\lambda - \mu) q = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$, $q = 0$. Ceci est contraire aux hypothèses; ainsi μ est valeur propre de f.
On montrerait de même que λ est aussi une valeur propre de f. Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda, \mu\}}$.

3) D'après la question 1), on a : $0 = (f - \lambda \mathrm{Id}) \circ (f - \mu \mathrm{Id}) = (\mu - \lambda) q \circ (\lambda - \mu) p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\boxed{q \circ p = 0}$.

De même, comme $(f - \mu \mathrm{Id}) \circ (f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$, on trouve $\boxed{p \circ q = 0}$.

Enfin, comme $\mathrm{Id} = p + q$, on obtient, en composant par p (resp. par q) : $\boxed{p = p^2}$ (resp. $\boxed{q = q^2}$).

4) Comme $\lambda\mu \neq 0$, f n'admet pas la valeur propre 0. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, et comme E est de dimension finie, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

De plus, on a vu en 1) que $f^2 - (\lambda+\mu) f + (\lambda\mu)\mathrm{Id} = 0$. D'où $f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}(f - (\lambda+\mu)\mathrm{Id})$. On remplace f et Id à l'aide de p et q, ce qui donne finalement : $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{\lambda} p + \frac{1}{\mu} q}$.

5) La relation $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ est vérifiée pour $m = 0, 1, 2$ d'après l'énoncé, et pour $m = -1$ d'après la question précédente.

Une démonstration par récurrence sans difficulté, d'une part pour $m \in \mathbb{N}$, d'autre part pour $-m \in \mathbb{N}$, donne (en utilisant le fait que $p \circ q = q \circ p = 0$) : $\boxed{\forall m \in \mathbb{Z},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q}$.

6) Soient deux réels α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$. En composant par p, on a $\alpha p = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $p \neq 0$. De même, en composant par q, on obtient $\beta = 0$.
Donc (p, q) est une famille libre et $\boxed{\dim(F) = 2}$.

7) Soit $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$. Alors $h = \alpha p + \beta q$ et comme $p \circ q = q \circ p = 0$, $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$. Comme (p,q) est une famille libre, on a $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$, i.e. (puisque λ et μ sont supposés positifs) $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \pm\sqrt{\mu}$. On obtient 4 possibilités, qui réciproquement conviennent toutes. Par conséquent, les 4 solutions sont $\boxed{h = \pm\sqrt{\lambda}\, p \pm \sqrt{\mu}\, q}$.

8) Définissons la matrice K diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & I_{k-2} \end{array}\right),$$

où I_{k-2} est la matrice identité de $\mathbb{M}_{k-2}(\mathbb{R})$ (bien définie car $k \geqslant 2$).
Alors un produit par blocs donne immédiatement $\boxed{K^2 = I_k}$.

9) On va raisonner matriciellement. Appelons k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ ($k \geqslant 2$) et considérons une base de diagonalisation $\mathcal{B}_d$ pour f ; c'est également une base de diagonalisation pour p et q car $p = \frac{1}{\lambda-\mu}(f - \mu \mathrm{Id})$ et $q = \frac{1}{\mu-\lambda}(f - \lambda \mathrm{Id})$. De plus, dans la base $\mathcal{B}_d$, ces matrices sont définies par blocs comme suit :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_d}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array}\right),\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_d}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right) \quad\text{et}\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_d}(q) = \left(\begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right).$$

Soit alors p' l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_d$ est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array}\right)$$

où la matrice $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ a été définie à la question précédente. De plus,

- un produit par blocs donne $M^2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_d}(p)$, donc $p'^2 = p$;
- des produits par blocs donnent $M \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_d}(q) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_d}(q) \cdot M = 0_n$, donc $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$;
- comme M n'est pas diagonale, $p' \notin F = \mathrm{Vect}(p,q)$.

En résumé, $\boxed{\text{l'endomorphisme } p' \text{ ainsi construit répond à la question}}$.

10) Si $\dim(E) \geqslant 3$, alors λ ou μ est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est λ. Posons $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$, où p' est l'endomorphisme défini à la question précédente. On a $h^2 = \lambda p + \mu q = f$ par propriétés de p' et q, et pourtant $h \notin F$ car $p' \notin F$ et $\lambda \neq 0$.
En conclusion, $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F}$.

Partie III

1) Pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda_i^k\right) p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.$$

2) Prenons $P(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$. Alors $P(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1,\dots,m$, et d'après la question précédente $P(f) = 0$. Le polynôme P est annulateur de f et il est scindé à racines simples. Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

3) D'après la question 1), $L_\ell(f)=\sum_{i=1}^{m} L_\ell(\lambda_i)p_i$. Mais $L_\ell(\lambda_i)=\delta_{\ell,i}$ (où $\delta_{\ell,i}=1$ si $\ell=i$ et 0 si $\ell\neq i$).

Donc $\boxed{L_\ell(f)=p_\ell}$. De plus,

$$(f-\lambda_\ell \mathrm{Id})\circ p_\ell=(f-\lambda_\ell \mathrm{Id})\circ L_\ell(f)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(f-\lambda_i \mathrm{Id})}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq\ell}}(\lambda_\ell-\lambda_i)}=\frac{0}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq\ell}}(\lambda_\ell-\lambda_i)}=0.$$

Il en résulte que $\boxed{\mathrm{Im}(p_\ell)\subset\ker(f-\lambda_\ell \mathrm{Id})}$.

En outre, le polynôme $P(X)$ de la question 2) est annulateur de f et a pour racines $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. Donc $\mathrm{Sp}(f)\subset\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$.
Et par hypothèse, pour tout $1\leqslant\ell\leqslant m$, $p_\ell\neq 0$ donc $\mathrm{Im}(p_\ell)\neq\{0_E\}$ et $\ker(f-\lambda_\ell \mathrm{Id})\neq\{0_E\}$. Ceci signifie que λ_ℓ est effectivement une valeur propre de f.
Finalement, on a bien $\boxed{\mathrm{Sp}(f)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}}$.

4) Comme $p_\ell(f)=L_\ell(f)$, $p_i\circ p_j=(L_i\cdot L_j)(f)$.

- Si $i\neq j$, le polynôme $P(X)=\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$ divise $(L_i\cdot L_j)(X)$. Comme $P(f)=0$, on a donc $(L_i\cdot L_j)(f)=0$ et $\boxed{p_i\circ p_j=0}$.
- Si $i=j$, comme $\mathrm{Id}=\sum_{k=1}^{m}p_i$ (relation de l'énoncé pour $k=0$), en composant par p_i on obtient $\boxed{p_i^2=p_i}$.

5) L'endomorphisme f étant diagonalisable, d'après le cours on a $\boxed{E=\bigoplus_{i=1}^{m}\ker(f-\lambda_i \mathrm{Id})}$.

Le fait que chaque p_i est un projecteur a été démontré à la question précédente. De plus, comme $\mathrm{Id}=\sum_{k=1}^{m}p_i$, on a $E=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Im}(p_i)$. Or on a vu que $\mathrm{Im}(p_i)\subset E_{\lambda_i}(f)$. D'après la somme directe précédente, on a donc $E=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathrm{Im}(p_i)$ et $\mathrm{Im}(p_i)=E_{\lambda_i}(f)$ pour tout i.

Enfin le fait que $p_i\circ p_j=0$ pour $i\neq j$ montre que $\boxed{\text{les } p_i \text{ sont les projecteurs associés à cette somme directe}}$.

6) Écrivons une combinaison linéaire nulle des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$: $\sum_{i=1}^{m}a_ip_i=0$. Soit $\ell\in[\![1;m]\!]$. En composant par p_ℓ, on obtient $a_\ell p_\ell=0$, d'où $a_\ell=0$ car p_ℓ n'est pas nul d'après l'énoncé.
Ainsi tous les coefficients a_i sont nuls et la famille $(p_1,\dots,p_m)$ est libre. Donc $\boxed{\dim(F)=m}$.

7) Soit $h=\sum_{i=1}^{m}\alpha_ip_i\in F$ telle que $h^2=f$. Alors $h^2=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2p_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_i$ et comme la famille $(p_1,\dots,p_m)$ est libre, $\alpha_i^2=\lambda_i$ pour tout i. Réciproquement, tous les h vérifiant cette relation sont solutions.

En résumé, $\boxed{\mathcal{R}(f)\cap F=\left\{\sum_{i=1}^{m}\pm\sqrt{\lambda_i}\,p_i\right\}}$.

8) a) Si $m=n$, il y a n sous-espaces propres dans l'espace E de dimension n.
Donc $\boxed{\text{la dimension de chaque sous-espace propre de } f \text{ est égale à } 1}$.

b) Si $h \in \mathcal{R}(f)$, $h \circ f = h^3 = f \circ h$. Donc h et f commutent et d'après le cours, tout espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par h. Soit x un vecteur propre de f, par exemple $x \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$. Comme $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$, $h(x) = \mu_i x$ et $\boxed{x \text{ est vecteur propre pour } h}$.

c) Soit $h \in \mathcal{R}(f)$. D'après la question précédente, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, $h(x_i) = \mu_i x_i$.

Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)$, $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ et

$$h(x) = h(x_1 + \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i(x)$$

soit $h = \sum_{i=1}^{m} \mu_i p_i$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(f) \subset F}$.

En reprenant la question III.7), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide est : $\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], \lambda_i \geqslant 0}$.

9) Si $m < n$, alors il existe i tel que $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geqslant 2$. Si les λ_i sont positifs ou nuls, on peut alors reprendre le même raisonnement qu'à la question II.10), qui montre que $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F}$.

Partie IV

A) 1) Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ et $(a_1, \ldots, a_p)$ une famille de réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0$.

En composant par f^{p-1}, comme $f^q = 0$ pour tout $q \geqslant p$, on obtient $a_0 f^{p-1}(x) = 0$ donc $a_0 = 0$. On recommence en composant par $f^{p-2}, \ldots, f$, ce qui donne au final $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$.

Donc $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre}}$. Cette famille a p éléments dans un espace de dimension n, donc $\boxed{p \leqslant n}$ et $\boxed{f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0}$.

2) Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, soit $h \in ł$ tel que $h^2 = f$. Alors $h^{2n} = f^n = 0$ donc h est nilpotent et d'après 1), $h^n = 0$. De plus, $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ donc $2p - 2 \leqslant n - 1$, i.e. $\boxed{2p - 1 \leqslant n}$.

3) On sait d'après le cours que pour $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1;1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + O(x^n)$$

au voisinage de 0. Ici, $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\boxed{a_k = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}}$.

4) D'après la question précédente, pour $-1 < x < 1$, $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$ où γ est une fonction bornée au voisinage de 0. En élevant au carré, cela donne

$$1 + x = (P_n(x) + x^n \gamma(x))^2 = P_n^2(x) + x^n(2P_n(x)\gamma(x) + x^n \gamma(x)^2) = \boxed{P_n^2(x) + x^n \eta(x)}$$

avec η une fonction bornée au voisinage de 0.

Posons alors $Q_n(x) = P_n^2(x) - x - 1$; c'est une fonction polynôme. D'après la relation précédente, $x \mapsto Q_n(x)/x^n$ est une fonction bornée au voisinage de 0. Ceci n'est possible que si $Q_n(X)$ n'admet pas de terme en X^k pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, ce qui entraîne $\boxed{X^n \text{ divise } Q_n(X)}$ .On écrira dans la suite $Q_n(X) = X^n \cdot S_n(X)$ où S_n est une fonction polynôme.

5) • D'après les résultats des questions précédentes, $(\mathrm{P}_n(f))^2 - f - \mathrm{Id} = (\mathrm{P}_n^2)(f) - f - \mathrm{Id} = f^n \circ \mathrm{S}_n(f)$. Or $f^n = 0$ d'après 1), donc $(\mathrm{P}_n(f))^2 = f + \mathrm{Id}$, i.e. $\mathrm{P}_n(f) \in \mathcal{R}(f + \mathrm{Id})$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(f + \mathrm{Id}) \neq \emptyset}$.

• Plus généralement, $(\mathrm{P}_n(\alpha f))^2 - \alpha f - \mathrm{Id} = (\mathrm{P}_n^2)(\alpha f) - \alpha f - \mathrm{Id} = (\alpha f)^n \circ \mathrm{S}_n(\alpha f)$. Comme $f^n = 0$, $(\mathrm{P}_n(\alpha f))^2 = \alpha f + \mathrm{Id}$, i.e. $\mathrm{P}_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{Id})$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{Id}) \neq \emptyset}$.

• Comme $\beta \neq 0$, soit $h \in \mathcal{R}(\frac{1}{\beta} f + \mathrm{Id})$ (c'est possible d'après ce qui précède). Alors $h^2 = \frac{1}{\beta} f + \mathrm{Id}$ et comme $\beta > 0$, $(\sqrt{\beta}\, h)^2 = f + \beta \mathrm{Id}$. Donc $\sqrt{\beta}\, h \in \mathcal{R}(f + \beta \mathrm{Id})$ et $\boxed{\mathcal{R}(f + \beta \mathrm{Id}) \neq \emptyset}$.

B) 1) La matrice $\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}_n$ est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale ; son polynôme caractéristique est donc égal à $(-\mathrm{X})^n$, et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit $\boxed{(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}_n)^n = 0}$.

2) Comme f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé, il est trigonalisable. De plus, comme f n'admet qu'une seule valeur propre λ, il existe une base dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ. D'après la question précédente, $(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}_n)^n = 0_n$ et $(f - \lambda \mathrm{Id})^n = 0$. Donc $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^n}$.

3) D'après la partie A), comme $(f - \lambda \mathrm{Id})^n = 0$, $\mathcal{R}\big((f - \lambda \mathrm{Id}) + \lambda \mathrm{Id}\big) \neq \emptyset$ (question A)5) en prenant $\beta = \lambda$ et en remplaçant f par $f - \lambda \mathrm{Id}$). Donc $\boxed{\text{si } \lambda > 0 \text{ alors } \mathcal{R}(f) \neq \emptyset}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆