CORRIGÉ DM N°12 : CCP PC 2003 MATHS 1

PARTIE I

1a) Si $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$^t XY = ^t YX = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

1b) Développement sans problème :

$$\begin{aligned} \left(^t XY\right)^2 &= (^t XY)(^t XY) = (^t XY)(^t YX) \text{ calcul précédent} \\ &= (^t X)\left(Y^t Y\right)(X) \text{ par associtivité} \\ &= (^t YX)(^t XY) = ^t Y(X^t X)Y \text{ symétriquement} \end{aligned}$$

1c) Si on considère que « $^t XY = \langle x, y \rangle$ dans une base orthonormée » n'est pas une formule classique on refait le calcul et

$$^t X(SY) = \sum_{(i,j)} x_i s_{i,j} y_j = \langle X, SY \rangle$$

puis comme S est symétrique $^t X(SY) = ^t X^t SY = ^t (SX)Y = \langle SX, Y \rangle$.

2a) On a : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ^t XS_1X \geqslant 0$ et $^t XS_2X \geqslant 0$ et donc en ajoutant $^t X\left(S_1 + S_2\right)X \geqslant 0$

$$(S_1, S_2) \in \left(\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2 \Rightarrow S_1 + S_2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

2b) idem car la somme d'un réel positif et d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.

2c) On a : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $^t X\left(^t AA\right)X = ^t (AX)(AX) = \langle AX, AX \rangle = ||AX||^2 \geqslant 0$. Et donc

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ ^t AA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

3a) Si $SX = \lambda X$ on a $^t XSX = \lambda^t XX = \lambda \, ||X||^2$. Donc si $^t XSX = 0$ on a $\lambda = 0$ (car X est non nul donc $||X|| \neq 0$)

S est donc une matrice diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une unique valeur propre 0 . S est donc la matrice nulle : $S = P.0.P^{-1} = 0$

3b) On veut que MX soit orthogonal àX pour tout X . C'est une propriété classique du produit vectoriel . Il suffit de prendre pour M la matrice de $x \mapsto i \wedge x$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien $^t XMX = 0$

4a) Sétant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$: il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_k)$ telle que $\forall k$, $SV_k = \lambda_k V_k$

Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour toute matrice colonne $X = \sum_{k=1}^{n} y_k V_k$

$$^t XSX = \langle X, SX \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} y_k V_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$$

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X un vecteur propre associé, le calcul du **3a** donne $^t XSX = \lambda \, ||X||^2$. Comme on suppose $^t XSX \geqslant 0$ et que $X \neq 0$ on a bien $\lambda \geqslant 0$.

4b) Deux matrices semblables ont même spectre . Donc si S' est symétrique réelle semblable àS symétrique positive les valeurs propres de S (donc de S') sont toutes positives donc S' est positive.

5a) Sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ la relation binaire $\geqslant$ est bien :

— réflexive : $(0)_n$ est bien positive donc $S_1 \geqslant S_1$
— antisymétrique : si $S_1 \geqslant S_2$ et si $S_2 \geqslant S_1$ les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes à la fois positives et négatives. $S_2 - S_1$ est donc diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une seule valeur propre 0 donc c'est la matrice nulle. $S_2 = S_1$
— transitive : Si $S_1 \geqslant S_2$ et $S_2 \geqslant S_3$ on a $S_1 - S_2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 - S_3 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après **2a** la somme $S_1 - S_3 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \geqslant S_3$.

5b) il suffit de prendre $S_1 = 0$ et pour S_2 une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une négative . Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5c) la relation $>$ n'est pas réflexive car $(0)_n \notin \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

5d) On peut se douter (ou montrer) qu'une matrice de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a des valeurs propres strictement positives.

On prend donc $S_2 = 0$ et S_1 symétrique ayant des valeurs propres positives et ayant la valeur propre 0 . Par exemple $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a $S_1 \neq (0)$ ${}^t XS_1X = z^2 \geqslant 0$ et si $X = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ${}^t XS_1X = 0$

6a) Question de cours . On doit montrer $x \in E_\lambda(u) \Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $u(x) = \lambda x \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \text{ par hypothèse sur } u \text{ et } v \\ &= v(u(x)) = v(\lambda(x)) \\ &= \lambda v(x) \text{ par linéarité de } v \end{aligned}$$

6b) L'endomorphisme induit par v diagonalisable sur un sous espace stable est lui même diagonalisable. Donc l'endomorphisme v_i est diagonalisable et il existe une base de $E_{\lambda_i}(u)$ qui est une base de vecteurs propres de v_i. u étant diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres. L'union des bases précédentes est donc une base de E . Par construction ces vecteurs sont des vecteurs propres de v et de u (car éléments des sous espaces propres). Dans cette base, u et v sont donc simultanément diagonalisables.

7a) Si A et B commutent, A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On prend la question précédente avec $A = \mathrm{M}at_{\mathscr{C}}(u)$ et $B = \mathrm{M}at_{\mathscr{C}}(v)$. P est alors la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.

Réciproquement si A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage, on a $A = PDP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$ et comme deux matrices diagonales commutent $AB = BA = P(D\Delta)P^{-1}$ smallskip

7b)

A est de rang 1 et $E_0(A)$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$. Par la trace on en déduit que la troisième valeur propre est 3, puis on trouve $E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour B le calcul du polynôme caractéristique, en commençant par exemple par faire $C_2 + C_3 - > C_3$, donne deux valeurs propres : 4 (double) et 1 (simple) . Puis le calcul des sous espaces propres donne : $E_4(B)$ est le plan d'équation $-2x + y - z = 0$ et $E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $E_1(B) \subset E_0(A)$, $E_3(A) \subset E_4(B)$. Les trois droites $E_1(B), E_3(A)$, $E_0(A) \cap E_4(B)$ sont trois droites de vecteurs propres communs qui engendrent l'espace . Une matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8) S_1 et S_2 sont diagonalisables (symétriques réelles) , et commutent. S_1 et S_2 sont donc diagonalisables avec une même matrice de passage ($S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$). Cette matrice de passage diagonalise aussi $S_1S_2 = S_2S_1 = PD\Delta P^{-1}$, la matrice diagonale semblable àS_1S_2étant le produit des deux matrices semblables àS_1 et S_2. S_1 et S_2étant positives ont toutes leurs valeurs propres positives. Les valeurs propres de S_1S_2 sont donc aussi toutes positives et S_1S_2 est symétrique positive.(toujours **4a**).

9a) Avec les notations précédentes ($S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$). On donc $\Delta - D$ positives . Donc pour les termes diagonaux $\delta_i - d_i \geqslant 0$ et $d_i \geqslant 0$. La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall i$, $\delta_i^2 \geqslant d_i^2$. $\Delta^2 - D^2$ est donc positive et $S_2^2 - S_1^2$ est une matrice symétrique semblable àune matrice symétrique positive donc est aussi positive. $S_2^2 \geqslant S_1^2$ (cf **4b)**

9b) On a $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 0 et 5/2 réels positifs. La matrice et positive est $S_2 \geqslant S_1$.

S_1 de valeurs propres 0 et 1 donc $S_1 \geqslant 0$

et $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ de déterminant $-9/4$. Le produit des valeurs est négatif. L'une des valeurs propres es négatives.$S_2^2 - S_1^2$ n'est pas positive.

Partie II

1)

a $\Leftrightarrow$ **b** : idem **I4a**

Sétant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_k)$ telle que $\forall k$, $SV_k = \lambda_k V_k$

Si toutes les valeurs propres sont strictement positives on a alors pour toute matrice colonne non nulle $X = \sum_{k=1}^{n} y_k V_k$

$$^tXSX = \langle X, SX\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} y_k V_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 > 0$$

En effet on a une somme de termes positifs , un au moins étant strictement positif.

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X vecteur propre associé on a $^tXSX = \lambda \|X\|^2$. Comme on suppose $^tXSX > 0$ et que $X \neq \overrightarrow{0}$ on a bien $\lambda > 0$.

b $\Rightarrow$ **c** . Sétant diagonalisable dans une base orthonormée (symétrique réelle) on peut écrire $S = PD^tP$. avec $D = \mathrm{diag}(d_i)$. Par hypothèses les d_i sont strictement positifs . On peut donc définir $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{d_i})$ qui est inversible car les termes diagonaux sont non nuls. $M = \Delta^tP$ est alors <u>une</u> solution du problème.

$$^tMM = P\Delta\Delta^tP = PD^tP = S$$

c $\Rightarrow$ **d** si $S =^t MM$ avec M inversible , S est inversible (comme produit de matrices inversibles) et S est positive d'après **I2c**

d $\Rightarrow$ **b** : S est positive donc toutes les valeurs propres de S sont positives et S est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de S . Les valeurs propres de S sont donc strictement positives.

On a la suite $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow b$ et $a \Leftrightarrow b$, donc l'équivalence des 4 propositions.

2a) A est bien une matrice symétrique.

Si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = AX = (y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ \forall j \in [\![2, n-1]\!] \text{ , } y_j = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
{}^t\mathrm{XAX} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= \left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + x_1^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\right) - \sum_{i=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2 + x_1^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2\right) \\
&= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i - x_{i+1}\right)^2
\end{aligned}$$

2b) pour toute colonne X, on constate que ${}^t\mathrm{XAX}$ est une somme de carrés donc est un réel positif. De plus la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!] \text{ , } x_{i+1} - x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Tous les x_i sont donc nuls . Donc si $\mathrm{X} \neq 0$ ${}^t\mathrm{XAX}$ est strictement positif.

2c) Avec la matrice M du sujet notons $\mathrm{S} = {}^t\mathrm{MM} = \left(s_{i,j}\right)$ on a en faisant le produit :

$$\begin{cases} s_1 = u_1^2 \\ i > 1 \Rightarrow s_i = u_i^2 + v_{i-1}^2 \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \Rightarrow s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \\ \left|j - i\right| > 1 \Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} u_1^2 = 2 \\ i > 1 \Rightarrow u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \Rightarrow u_i v_i = -1 \end{cases}$$

On a donc $v_i = -\frac{1}{u_i}$ et en reportant $u_i^2 = 2 - \frac{1}{u_{i-1}^2}$. Soit en posant $a_i = u_i^2$ la suite homographique :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 2 - \frac{1}{a_{i-1}} \end{cases}$$

l'équation $l = 2 - 1/l$ donne un point fixe double $l = 1$. La suite $\frac{1}{a_i - 1}$ est donc arithmétique . Or

$$\frac{1}{a_i - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i-1}}} = \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} - 1} = 1 + \frac{1}{a_{i-1} - 1}$$

d'où $\frac{1}{a_i - 1} = i$ et

$$u_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}, v_i = -\sqrt{\frac{i}{i+1}}$$

3a) $\mathscr{U}$ est une base car S est une matrice inversible d'après **II1c**

3b) C'est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt .Démonstration par récurrence :

— $\left(\mathrm{V}_1\right)$ est réduit àun seul vecteur non nul donc est une famille orthogonale de vecteurs non nuls

— $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et $\mathrm{Vect}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$. En effet

— p_1 est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(U_1) = \mathrm{Vect}(V_1)$ donc $V_2 = U_2 - p_1(U_2)$ est orthogonal àV_1
— si V_2était nul , on aurait $U_2 = p_1(U_2) \in \mathrm{Vect}(U_1)$. Absurde car $\left(U_1, U_2\right)$ est libre
— $\left(V_1, V_2\right)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls , c'est donc une famille libre.
— Enfin $\mathrm{Vect}(V_1, V_2) \subset Vect(U_1, U_2)$ par construction,et comme les deux familles de deux vecteurs sont libres il y aégalité.

— On suppose que $\left(V_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1} = \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$. Montrons que $\left(V_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} = \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.
— par hypothèse de récurrence on doit seulement montrer que V_k est un vecteur non nul orthogonal à $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ puis $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} = \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.
— Par construction p_{k-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1} = \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ donc $V_k = U_k - p_{k-1}\left(U_k\right)$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$
— Si V_k est nul alors $U_k = p_{k-1}\left(U_k\right) \in \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ et la famille $\left(U_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est lié . Absurde
— Enfin par construction $V_k \in Vec(U_k) \oplus \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1} = \mathrm{Vect}\left(U_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ et $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1} = \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \subset \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Donc $\mathrm{Vect}(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} \subset \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Les deux familles étant libres de même cardinal , les deux sous espaces sont égaux.

Pour $k = n$ on obtient que $\mathscr{V}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

3c) La base est orthonormale car on norme une base orthogonale (et les dénominateurs sont non nuls car les V_i sont des vecteurs non nuls)

Par construction de $\mathscr{V}$ on a vu que $V_k \in \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Les coordonnées de V_k sur $U_{k+1}, \cdots U_n$ sont donc nulles .

$Mat_{\mathscr{U}}(\mathscr{V})$ est triangulaire supérieure. Diviser chaque colonne par sa norme ne change pas les coefficients nuls . $Mat_{\mathscr{U}}(\mathscr{W})$ est triangulaire supérieure.

3d) Notons $\mathscr{B}$ la base canonique . On a

$$M = Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{U}) = Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{W}) Mat_{\mathscr{W}}(\mathscr{U}) = PT$$

où T est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.

On a alors $S = {}^t MM = {}^t T {}^t PPT$. Mais P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à$\mathscr{W}$ toutes deux bases orthonormées . Donc P est orthogonale et ${}^t PP = I_n$. Il reste donc $S = {}^t TT$.

3e) Si on pose a priori $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ le calcul donne :

$${}^t TT = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en résolvant le système ligne par ligne et en choisissant pour a, d, f les racines carrées positives on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que T est inversible et donc d'après **II 1** S est définie positive.

4a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a ${}^t XA_0X = by^2 + 2cxy$ donc $y = 0$ ou $by + 2cx = 0$

4b)

— si A est définie positive les valeurs propres de A sont strictement positives (cf **II 1)**. Leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont aussi. On a donc $a + b > 0$ et $ab - c^2 > 0$. On en déduit que $a + b$ et ab sont strictement positifs donc a et b le sont.
— Si $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$ on a $b > \frac{c^2}{a} > 0$ donc $Tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. La somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs donc les valeurs propres sont strictement positives . D'après **II 1** A est définie positive.

4c) calcul par bloc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & {}^t\mathrm{X}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & {}^t\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{S}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \mathrm{X}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xa+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{V} & x{}^t\mathrm{V}+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{S}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \mathrm{X}' \end{pmatrix} \\
&= xax+x{}^t\mathrm{X}'\mathrm{V}'+x{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{S}'\mathrm{S}' \\
&= ax^2+x({}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{V})+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{S}'\mathrm{X}' \\
&= ax^2+2x{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{S}'\mathrm{X}' \text{ car } {}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'={}^t\mathrm{X}'\mathrm{V} \text{ d'après } \mathbf{I\ 1a} \\
&= a\left(x+\frac{{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'}{a}\right)^2-\frac{1}{a}\left({}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'\right)^2+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{S}'\mathrm{X}' \\
&= a\left(x+\frac{{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'}{a}\right)^2-\frac{1}{a}\left({}^t\mathrm{X}'\mathrm{V}{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'\right)+{}^t\mathrm{X}'\mathrm{S}'\mathrm{X}' \text{ d'après } \mathbf{I\ 1\ b} \\
&= a\left[\left(x+\frac{{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'}{a}\right)^2+\frac{1}{a^2}{}^t\mathrm{X}'\left(-\mathrm{V}{}^t\mathrm{V}+a\mathrm{S}'\right)\mathrm{X}'\right]
\end{aligned}$$

On vérifie que tous les produits matriciels ont un sens les matrices étant de tailles compatibles.
On en déduit donc :

— si $a>0$ et $a\mathrm{S}'-\mathrm{V}^t\mathrm{V}$ définie positive , pour toute matrice colonne $\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\left(x+\frac{{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'}{a}\right)^2\geqslant 0$ et ${}^t\mathrm{X}'\left(a\mathrm{S}'-\mathrm{V}^t\mathrm{V}\right)\mathrm{X}'\geqslant 0$ donc ${}^t\mathrm{XSX}\geqslant 0$. De plus si ${}^t\mathrm{XSX}=0$ on a une somme nulle de réelles positives donc chaque terme est nulle . En particulier ${}^t\mathrm{X}'\left(a\mathrm{S}'-\mathrm{V}^t\mathrm{V}\right)\mathrm{X}'=0$ et donc $\mathrm{X}'=0$ car $a\mathrm{S}\prime-\mathrm{V}^t\mathrm{V}$ est définie positive on trouve alors $x=0$ en reportant dans $\left(x+\frac{{}^t\mathrm{V}\mathrm{X}'}{a}\right)^2=0$. Donc $\mathrm{X}\neq 0\Rightarrow{}^t\mathrm{XSX}>0$ et S est définie positive.

— Si S est définie positive alors $a>0$ car pour $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix}$, ${}^t\mathrm{XSX}=a$ d'après le calcul précédent (avant la division par a) et $a\mathrm{S}'-\mathrm{V}^t\mathrm{V}$ est définie positive car pour toute matrice non nul $\mathrm{X}'\in\mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

$$ {}^t\mathrm{X}'\left(a\mathrm{S}'-\mathrm{V}^t\mathrm{V}\right)\mathrm{X}'=a^2\,{}^t\mathrm{XSX}>0 \text{ en prenant } \mathrm{X}=\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{X}' \end{pmatrix}$$

4d)

— Si S est définie positive la question précédente donne par une récurrenceévidente que toutes les S_i sont définies positives et tous les a_i positifs pour $i<n$. Enfin $a_n>0$ comme valeur propre de la matrice S_n définie positive.

— Réciproquement si les (a_i) sont tous strictement positifs $\mathrm{S}_n=(a_n)$ est définie positive . S_n est définie positives et $a_{n-1}>0$ donc S_{n-1} est définie positive et par récurrence si S_{i-1} est définie positive S_i est définie positive car $a_{i-1}>0$.

4e) Si $\mathrm{S}=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ on a $a_1=a,\mathrm{V}_1=\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix},\mathrm{S}_1'=\begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$ d'où

$$\mathrm{S}_2=\begin{pmatrix} ab-d^2 & af-de \\ af-de & ac-e^2 \end{pmatrix}$$

S est donc définie positive si et seulement si $a>0$ et S_2 définie positive . Donc en utilisant **II 4b** si et seulement si $a>0, ab-d^2>0$ et $\det(\mathrm{S}_2)>0$ or $\det(\mathrm{S}_2)=(ab-d^2)(ac-e^2)-(af-de)^2=a\det(\mathrm{S})$

S est définie positive si seulement si a>0 , $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}>0$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆