CORRIGÉ DU DS N°4

PROBLÈME I : ENDOMORPHISMES CYCLIQUES (d'après EPITA 2002)

PARTIE 1

1. **a)** — On a $a(e_1)=e_2$, $a^2(e_1)=a(e_2)=e_3$. On a donc $\mathrm{E}=\mathrm{V}ect(e_1,a(e_1),a^2(e_1))$.

— On a donc $\mathrm{E}\subset \mathrm{V}ect(a^k(e_1),k\in\mathbb{N})$. L'inclusion inverse étant évidente, on a $\mathrm{E}=\mathrm{V}ect(a^k(e_1),k\in\mathbb{N})$. $\boxed{a \text{ est donc cyclique.}}$

— Pour déterminer les valeurs propres on cherche les racines du polynôme caractéristique

$$\chi_u(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 6\\ 1 & -\lambda & -11\\ 0 & 1 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$

ce qui donne $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$. $\lambda=1$ est racine évidente et $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)$. $\boxed{\text{Les valeurs propres sont : } 1,2 \text{ et } 3.}$

— Pour $\lambda=1$ on doit résoudre le système $a(v_1)=v_1$. Notons (x,y,z) les coordonnées de v_1, et le sujet impose $z=1$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 6 &= x\\ x-11 &= y\\ y+6 &= 1\end{cases}$$

la solution est évidente : $v_1=\begin{pmatrix}6\\-5\\1\end{pmatrix}$

— pour $\lambda=2$:

$$\begin{cases} 6 &= 2x\\ x-11 &= 2y\\ y+6 &= 2\end{cases}$$

donne $v_2=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$

— pour $\lambda=3$:

$$\begin{cases} 6 &= 3x\\ x-11 &= 3y\\ y+6 &= 3\end{cases}$$

donne $v_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

— On a trois valeurs propres distinctes en dimension 3. L'endomorphisme est diagonalisable et (v_1,v_2,v_3) est une base de E . Dans cette base la matrice de a est $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$; A est donc semblable à D et la matrice de passage est $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}6&3&2\\-5&-4&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$

On a alors $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$ ou encore $\mathrm{D}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

b) On trouve ici encore $b(e_1)=e_2$ et $b^2(e_1)=e_3$, donc, par le même raisonnement, $\boxed{h \text{ est cyclique.}}$

On trouve $\det(\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}d)=-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1$ de racines 1 (simple) et -1 (double).

Les vecteurs propres vérifient

— soit $b(v)=v$ ce qui donne $v\in\mathrm{V}ect\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

— soit $b(v)=-v$ ce qui donne $v\in\mathrm{V}ect\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

La valeur propre -1 est double, or le sous espace propre associé est de dimension 1.

Donc $\boxed{b \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. **a)** Par définition on a : $\forall i\in[1,n]$, $c(x_i)=\lambda_i x_i$. Donc si on note $x_0=\sum_{i=1}^{n}x_i$, on obtient par linéarité $c(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$

et par récurrence facile $\boxed{c^k(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k x_i.}$

b) Soit une combinaison linéaire nulle des $c^k(x_0)$: $\sum_{k=0}^{n-1}a_k c_k(x_0)=0$, soit $\sum_{k=0}^{n-1}a_k\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k x_i=0$ ou $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\lambda_i^k\right)x_i=0$.
Or la famille des (x_i) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes). On a donc

$$\forall i\in[1,n],\ \sum_{k=0}^{n-1}a_k\lambda_i^k=0\ (*)$$

On considère alors le polynôme $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\mathrm{X}^k$ .Ce polynôme est de degré $\leqslant n-1$ et admet n racines distinctes (les λ_i). C'est donc le polynôme nul, et tous ses coefficients sont nuls.

Donc $\boxed{\text{la famille } \left(c^k(x_0)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \text{ est libre.}}$

Autre solution : On pouvait aussi remarquer que $(*)$ donne un système linéaire homogène, dont le déterminant est un déterminant de VanDerMonde...

c) Comme la famille est une famille libre de bon cardinal , c'est une base de E : $\mathrm{E}=\mathrm{V}ect\ \left(c^k(x_0)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ .Par double inclusion comme au I.1, on en déduit $\mathrm{E}=\mathrm{V}ect\ \left(c^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Donc $\boxed{c \text{ est cyclique.}}$

PARTIE 2

3. **a)** On peut remarquer que $x_0\neq 0$ car sinon $\mathrm{E}=\mathrm{V}ect(f^k(0))=\mathrm{V}ect(0)=\{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim(\mathrm{E})\geqslant 2$.
La famille (x_0) est donc libre. L'ensemble des entiers k non nuls tels que la famille $\{x_0,f(x_0),\dots,f^{k-1}(x_0)\}$ soit libre est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$; or elle est majorée par $n+1$ (car toute famille de $n+1$ éléments de E est liée) ; elle admet donc un plus grand élément m, qui vérifie par construction la propriété demandée.

On montre alors par récurrence que pour $k\in\mathbb{N}$, $f^{m+k}(x_0)\in\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$:

— si $k=0$: On sait que la famille $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m}$ est lié, et que la famille $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ est libre.
D'après un théorème du cours, $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$,i.e pour $k=0$, $f^{m+0}(x_0)\in\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$

— On suppose $f^{m+k}(x_0)\in\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$. Il existe donc des scalaires a_i tels que $f^{m+k}(x_0)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i f^i(x_0)$.
On a alors

$$f^{m+k+1}(x_0)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i f^{i+1}(x_0)=\sum_{j=1}^{m-1}a_{j-1}f^j(x_0)+a_{m-1}f^m(x_0)$$

et donc $f^{m+k+1}(x_0)\in\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$

— On a ainsi montré par récurrence : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ f^{m+k}(x_0)\in\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}.}$

b) Par définition de m, la famille est libre .
Elle est aussi génératrice car $\mathrm{E}=\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}=\mathrm{V}ect\ \left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ d'après le **a)** (en effet, si on ôte à une famille génératrice un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, la famille obtenue est encore génératrice.)
La famille $(x_0,f(x_0),f^2(x_0),\dots,f^{m-1}(x_0))$ est libre et génératrice. C'est donc une base de E. Elle est donc de cardinal n, d'où $m=n$.

4. **a)** Pour $i<n-1$, l'image du $i-$ème vecteur de base est le $(i+1)-$ème. La $i-$ème colonne de M est donc une colonne de 0 sauf ligne $i+1$ où il y a un 1. L'image du dernier vecteur de base est $f^m(x_0)=\sum_{i=0}^{n-1}p_i f^i(x_0)$. On a donc :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & p_1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1}\end{pmatrix}$$

b) On montre que $(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$:

Soit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Si on prend l'image de x_0 par cette relation, on trouve $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0) = 0$. Et donc, comme $(f^i(x_0))_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est une base de E, $a_i = 0$ pour tout i.

$$\boxed{(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \text{ est une famille libre de } \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

Il n'existe pas de polynôme non nul de degré $< n$ tel que $\mathrm{Q}(f) = 0$. En effet si $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k \mathrm{X}^k$ existe, on a $\sum_{k=0}^{n-1} q_k f^k = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Comme la famille est libre, $q_k = 0$ pour tout k, et donc $\mathrm{Q} = 0$

c) On a $\mathrm{P}(f) = f^n - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i$ donc $\mathrm{P}(f)(x_0) = f^n(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0) = 0$, puis, pour tout k, $\mathrm{P}(f)(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^{i+k}(x_0)$.

Les applications $\mathrm{P}(f)$ et $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ sont égales sur une base : elles sont égales $\boxed{\mathrm{P}(f) = 0.}$

5. **a)** Par une récurrence classique on a $f^k(x) = \lambda^k x$. Donc $\mathrm{P}(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \lambda^i x = \mathrm{P}(\lambda)x$.

On $x \neq 0$, donc $\boxed{\mathrm{P}(\lambda) = 0.}$ il s'agit d'ailleurs d'un résultat du cours).(

b) La matrice de $f - \lambda \mathrm{I}d$ est $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ soit

$$\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

— λ est valeur propre donc le rang est $\leqslant n-1$.
— d'autre part la "diagonale" de 1 montre que le rang est $\geqslant n-1$
— Donc le rang de $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ est égal à $n-1$, d'où $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{I}d) = 1$.
$\boxed{\text{Le sous espace propre est de dimension } 1}$

c) — Si il existe n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n, l'endomorphisme est toujours diagonalisable (cf. cours).
— Réciproque : Soit f cyclique, diagonalisable. Alors E est somme directe des sous-espaces propres , chacun d'entre eux étant de dimension 1. Il y a donc n sous-espaces propres , donc n valeurs propres distinctes.

6. **a)** — $\mathrm{C}(f)$ est un sous ensemble de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$
— $\mathrm{C}(f)$ contient $\mathrm{I}d$
— $\mathrm{C}(f)$ est stable par combinaison linéaire : si $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$ alors pour tous scalaires λ, μ :

$$\begin{aligned} (\lambda g + \mu h) \circ f &= \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) \\ &= f \circ (\lambda g) + f \circ (\mu h) = f \circ (\lambda g + \mu h) \end{aligned}$$

— $\mathrm{C}(f)$ est stable par la loi $\circ$: si $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$:

$$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

— Ainsi : $\boxed{\mathrm{C}(f) \text{ est une sous-algèbre de } (\mathscr{L}(\mathrm{E}), +, \cdot, \circ)}$

b) On suppose $u \circ f = f \circ u$, $v \circ f = f \circ v$ et $u(x_0) = v(x_0)$. On montre par récurrence que u et v prennent les mêmes valeurs sur la base $(f^k(x_0))_{\leqslant k\leqslant n-1}$, ce qui prouvera que $u = v$.
— pour $k = 0$ c'est la définition de u et v
— pour $k = 1$:

$$u(f(x_0)) = (u \circ f)(x_0) = (f \circ u)(x_0) = f(u(x_0)) = f(v(x_0)) = (f \circ v)(x_0) = (v \circ f)(x_0) = v(f(x_0))$$

— si $u(f^k(x_0)) = v(f^k(x_0))$

$$\begin{aligned} u(f^{k+1}(x_0)) &= (u \circ f)(f^k(x_0)) = (f \circ u)(f^k(x_0)) = f\left(u\left(f^k(x_0)\right)\right) \\ &= f\left(v\left(f^k(x_0)\right)\right) = (f \circ v)\left(f^k(x_0)\right) = (v \circ f)(f^k(x_0)) = v\left(f^{k+1}(x_0)\right) \end{aligned}$$

d'où l'égalité pour tout vecteur de la base.

c) Remarquons que les $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ existent : il s'agit des coordonnées de $g(x_0)$ dans une base.

On applique alors la question précédente avec $u=g$ et $v=\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. On suppose que $u=g\in \mathrm{C}(f)$, et, comme tout polynôme de l'endomorphisme f, on a $v\in \mathrm{C}(f)$.

Enfin on a supposé $u(x_0)=v(x_0)$. On a donc d'après le **a)** $u=v$ donc $\boxed{g=\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k}$

d) On vient de montrer que tout élément de $\mathrm{C}(f)$ est dans $\mathrm{V}ect(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$, et tout élément de $\mathrm{V}ect(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est dans $\mathrm{C}(f)$ (c'est un polynôme en f). Donc $\mathrm{C}(f)=\mathrm{V}ect\left(f^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.
De plus, d'après le **II.4.b)**, cette famille est libre. C'est donc une base de $\mathrm{C}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{C}(f) \text{ est un sous espace vectoriel de dimension } n}$$

PROBLÈME II : UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON (d'après CCP MP 2001)

I. Propriétés générales

1. Par développement par rapport à la première ligne, on obtient $\det \mathrm{C_P} = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n \mathrm{P}(0)$. Donc $\boxed{\mathrm{C_P} \text{ est inversible si et seulement si } \mathrm{P}(0) \neq 0}$.

2. En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\chi_{\mathrm{C_P}} = \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\mathrm{X} & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -\mathrm{X} & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\mathrm{X}-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-\mathrm{X}-a_{n-1}) \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\mathrm{X} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\mathrm{X} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+k+1}(-a_k) \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -\mathrm{X} & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\mathrm{X} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\mathrm{X} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -\mathrm{X} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-1-k \end{array}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{X} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -\mathrm{X} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\mathrm{X}-a_{n-1})(-\mathrm{X})^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+k+1}(-a_k)(-\mathrm{X})^k + \cdots + (-1)^{n+1}(-a_0)$$

$$= (-1)^n \left[\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_k \mathrm{X}^k + \cdots + a_0 \right]$$

soit $\boxed{\chi_{\mathrm{C_P}} = (-1)^n \mathrm{P}}$.

Rem : on a vu en exercice une autre façon de calculer ce déterminant…

3. Si $\mathrm{Q} = \chi_{\mathrm{A}}$ alors $\deg \mathrm{Q} = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$. Réciproquement, si $\deg \mathrm{Q} = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$, posons $\mathrm{P} = (-1)^n \mathrm{Q}$: on a alors $\mathrm{Q} = \chi_{\mathrm{C_P}}$ d'après la question précédente.

$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } \mathrm{Q} = \chi_{\mathrm{A}} \text{ si et seulement si } \mathrm{Q} \text{ a pour terme de plus haut degré } (-1)^n \mathrm{X}^n.}$

4. a) $\chi_{{}^t\mathrm{C_P}} = \chi_{\mathrm{C_P}}$ donne $\boxed{\mathrm{Sp}({}^t\mathrm{C_P}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{C_P})}$.

b)

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{C_P} - \lambda \mathrm{I}_n\right) \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda x_1 & = & x_2 \\ \lambda x_2 & = & x_3 \\ & \vdots & \\ \lambda x_{n-1} & = & x_n \\ \lambda x_n & = & -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_2 & = & \lambda x_1 \\ x_3 & = & \lambda^2 x_1 \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda^{n-1} x_1 \\ 0 & = & \mathrm{P}(\lambda) x_1 \end{pmatrix}$$

et on a $P(\lambda)=0$ donc $\boxed{\operatorname{Ker}({}^t C_P-\lambda I_n)=\mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}}$.

c) Si P est scindé à racines simples alors $\chi_{{}^tC_P}$ aussi et donc ${}^tC_P$ est diagonalisable (car $\chi_{{}^tC_P}$ est annulateur de C_p d'après le th. de Cayley-Hamilton).
Réciproquement, si ${}^tC_P$ est diagonalisable alors $\chi_{{}^tC_P}$ est scindé donc P aussi et, pour tout λ racine de P, on a $\lambda\in\operatorname{Sp}({}^tC_P)$ et la multiplicité de λ est égale à $\dim\Big(\operatorname{Ker}({}^tC_P-\lambda I_n)\Big)$. Or, on a vu au **b)** que $\dim\Big(\operatorname{Ker}({}^tC_P-\lambda I_n)\Big)=1$. Donc P est scindé à racines simples.
Ainsi $\boxed{{}^tC_P \text{ est diagonalisable si et seulement si } P \text{ est scindé à racines simples.}}$

d) ⋄ Puisque $\deg P=n$, si P a n racines deux à deux distinctes alors P est scindé à racines simples et donc **c)** donne $\boxed{{}^tC_P \text{ est diagonalisable.}}$

⋄ La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_1^{n-1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}1\\ \lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\right)$ est formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Elle est donc libre et donc $\boxed{\text{on a bien : }\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\dots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}\neq 0}$

5. **a)** Prenons $\boxed{n=2002,\quad P=X^{2002}-X^{2001}-X^{2000}-1999 \quad\text{et}\quad A=C_P.}$
On a $\chi_A=P$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $P(A)=O$.
Remarque : Comme $P(0)<0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=+\infty$, P a au moins une racine α dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n, la matrice $A=\alpha I_n$ vérifie l'équation (*tout simplement !*).

b) Puisque $f^{n-1}\neq 0$, on a $\operatorname{Ker} f^{n-1}\neq E$ et on peut choisir $e\in E\setminus\operatorname{Ker} f^{n-1}$ puis poser, pour $k\in[1,n]$, $e_k=f^{k-1}(e)$.
Montrons que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E : si il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$ tel que $\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k e_k=0$, posons $r=\min\{k \text{ tq } \lambda_k\neq 0\}$; on a alors

$$\begin{aligned}0=f^{n-r}\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k\right)&=f^{n-r}\left(\sum_{k=r}^n\lambda_k e_k\right)=\sum_{k=r}^n\lambda_k f^{n-r+k-1}(e)\\ &=\lambda_r f^{n-1}(e)+f^n\left(\sum_{k=r+1}^n\lambda_k f^{k-r}(e)\right)=\lambda_r f^{n-1}(e)\end{aligned}$$

donc, puisque $f^{n-1}(e)\neq 0$, $\lambda_r=0$ ce qui contredit la définition de r. Donc $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille libre de E donc une base de E et, pour $k\in[1,n-1]$, $f(e_k)=f^k(e)=e_{k+1}$ et $f(e_n)=f^n(e)=0$.

Donc $\boxed{\text{il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ telle que } \operatorname{Mat}(f,\mathscr{B})=\begin{pmatrix}0&&&0\\ 1&0&&0\\ &\ddots&\ddots&\vdots\\ &&1&0\end{pmatrix}=C_{X^n}.}$

II. Localisation des racines d'un polynôme

6. On a $\lambda X=AX$ donc $\forall i\in[1,n]$, $\lambda x_i=\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}x_k$ donc $|\lambda x_i|=\left|\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}x_k\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^n|a_{ik}||x_k|\leqslant\sum\limits_{k=1}^n|a_{ik}|\|X\|_\infty$ donc $\boxed{\forall i\in[1,n],\quad |\lambda x_i|\leqslant r_i\|X\|_\infty.}$

7. Appliquons le résultat de **6)** à i_0 tel que $|x_{i_0}|=\|X\|_\infty$: on obtient $|\lambda|\|X\|_\infty\leqslant r_{i_0}\|X\|_\infty$ donc, puisque $X\neq 0$, $|\lambda|\leqslant r_{i_0}$ donc $\lambda\in D_{i_0}$.

Ainsi $\forall\lambda\in\operatorname{Sp}(A)$, $\exists i_0\in[1,n]$ tq $\lambda\in D_{i_0}$ donc $\boxed{\operatorname{Sp}(A)\subset\bigcup\limits_{k=1}^n D_k.}$

8. On a vu au **2)** que les racines de P sont les valeurs propres de C_P et on peut appliquer **7)** à $A = C_p$ avec $r_1 = |a_0|$ et pour $i \in [2,n]$, $r_i = 1 + |a_{i-1}|$. Or, $\bigcup_{k=1}^{n} D_k$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $\max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$ donc

$\boxed{\text{toutes les racines de P appartiennent à } B_f(0,R) \text{ où } R = \max\left\{|a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}|\right\}.}$

9. Pour fixer les idées, supposons que $a = \max\{a,b,c,d\}$. Si $n \in \mathbb{N}$ est solution de l'équation proposée, il est racine de $P = X^a + X^b - X^c - X^d \in \mathbb{C}_a[X]$ donc, avec les notations de **8)**, on a $|n| \leqslant R$ avec $R = 2$ car $|a_0| = 0$ et $1+|a_k| = \begin{cases} 2 & \text{si } k \in \{b,c,d\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Mais, si 2 était solution, on aurait, en supposant, par exemple, $c > d$, $2^b\left(2^{a-b}+1\right) = 2^d\left(2^{c-d}+1\right)$ donc, par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers, $b = d$ ce qui est exclu. 0 et 1 étant clairement solutions, on peut conclure que :

$\boxed{\text{les seules solutions } n \in \mathbb{N} \text{ de } n^a + n^b = n^c + n^d \text{ sont 0 et 1.}}$

III. Suites récurrentes linéaires

10. Si $\forall n,\ u(n) = \lambda^n$ alors $\forall n,\ u(n+p) + a_{p-1}u(n+p-1) + \cdots + a_0u(n) = \lambda^n\left(\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_0\right) = \lambda^n P(\lambda)$. Donc

$\boxed{\text{la suite } n \mapsto \lambda^n \text{ appartient à F si et seulement si } \lambda \text{ est racine de P .}}$

11. ⋄ φ est clairement linéaire et si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, il existe une et une seule suite $u \in F$ telle que $\varphi(u) = \alpha$: c'est la suite définie par $u(0) = \alpha_0, \dots\ u(p-1) = \alpha_{p-1}$ et, pour $n \geqslant p$, $u(n) = -a_{p-1}u(n-1) - \cdots - a_0u(n-p)$. Donc φ est bijective et donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de F sur } \mathbb{C}^p \text{ .}}$

⋄ On a donc $\dim F = \dim \mathbb{C}^p$ soit $\boxed{\dim F = p \text{ .}}$

12. **a)** $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \cdots - a_ie_i(i) - \cdots - a_0e_i(0)$ donc $\boxed{e_i(p) = -a_i \text{ .}}$

b) Notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$. On a $e_i = \varphi^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ donc la famille $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Ainsi $\boxed{(e_0, \dots, e_{p-1}) \text{ est une base de F .}}$

c) $\forall u \in F,\ u = \varphi^{-1}[\varphi(u)] = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=0}^{p-1} u(i)\varepsilon_{i+1}\right] = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\varphi^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ donc $\boxed{\forall u \in F,\ u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\, e_i \text{ .}}$

13. $\boxed{f \in \mathscr{L}(E)}$ est évident et si $u \in F$, $\forall n$, $u(n+1+p) = -a_{p-1}u(n+1+p-1) - \cdots - a_0u(n+1)$ soit $f(u)(n+p) = -a_{p-1}f(u)(n+p-1) - \cdots$ donc $f(u) \in F$ ce qui montre que $\boxed{\text{F est stable par } f \text{ .}}$

14. Pour $u \in F$, $f(u) \in F$ donc **12.c** donne $f(u) = \sum_{k=0}^{p-1} f(u)(k)\,e_k = \sum_{k=0}^{p-1} u(k+1)\,e_k = \sum_{k=0}^{p-2} u(k+1)\,e_k + u(p)\,e_{p-1} = u(1)\,e_0 + \sum_{k=1}^{p-1} u(k)\,e_{k-1} + u$

En particulier, $f(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} - a_i\,e_{p-1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p-1 \\ -a_0\,e_{p-1} & \text{si } i = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{\operatorname{Mat}(f, (e_0, \dots, e_{p-1})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{p-1} \end{pmatrix} = {}^tC_P \text{ .}}$

15. **a)** D'après **4.d.**, une base de vecteurs propres pour ${}^tC_P$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}\right)$ donc une base de vecteurs propres pour g est $(v_0, \dots, v_{p-1})$ avec $v_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k\, e_k$. Mais la suite $w_i : n \mapsto \lambda_i^n$ appartient à F d'après **10.** et s'écrit $w_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k\, e_k$ d'après **12.**. Donc $v_i = w_i$

et $\boxed{\text{une base de vecteurs propres pour } g \text{ est } (v_0, \dots, v_{p-1}) \text{ avec } \forall n,\ v_i(n) = \lambda_i^n \text{ .}}$

b) Donc $\forall u \in F$, $\exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, $u = \sum_{i=0}^{p-1} k_i\, v_i$ soit $\boxed{\exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u(n) = \sum_{i=0}^{p-1} k_i\, \lambda_i^n \text{ .}}$

16. Ici, $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$ avec a, b, c distincts donc **15.** donne :

$\boxed{\text{une base de F est } \left((a^n)_{n\in\mathbb{N}}, (b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (c^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \text{ .}}$

IV. Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(\mathrm{U}-\mathrm{V})=1$

17. $\boxed{\text{Non ! (si } n\geqslant 2)}$ car $\mathrm{rg}(\mathrm{C_A})\geqslant n-1$ donc si $\mathrm{rg}(\mathrm{A})<n-1$ alors A ne saurait être semblable à $\mathrm{C_A}$ (si $n=1$, $\mathrm{A}=\mathrm{C_A}$).
On peut aussi, selon **4.c.**, prendre A diagonalisable mais avec une valeur propre au moins double.

18. Si on a $(**)$ alors $\mathrm{U}-\mathrm{V}=\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{C_U}-\mathrm{C_V})\mathrm{P}$. Or, les $(n-1)$ premières colonnes de $\mathrm{C_U}-\mathrm{C_V}$ sont nulles donc $\mathrm{rg}(\mathrm{C_U}-\mathrm{C_V})\leqslant 1$ et si on avait $\mathrm{rg}(\mathrm{C_U}-\mathrm{C_V})=0$ alors $\mathrm{C_U}-\mathrm{C_V}=0$ donc $\mathrm{U}-\mathrm{V}=0$ ce qui est exclu (U et V distinctes) donc $\mathrm{rg}(\mathrm{C_U}-\mathrm{C_V})=1$.
Donc $\mathrm{rg}(\mathrm{U}-\mathrm{V})=1$. On a donc montré que $\boxed{(**)\Longrightarrow(*)}$.

19. $\boxed{\mathrm{U}=\mathrm{I_2},\quad \mathrm{V}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad \text{vérifient (*) mais pas (**)}}$:
On a bien $\mathrm{rg}(\mathrm{U}-\mathrm{V})=1$ et, d'autre part $\chi_\mathrm{U}=\chi_\mathrm{V}$ donc $\mathrm{C_U}=\mathrm{C_V}$ et, si on avait (**), on aurait $\mathrm{U}=\mathrm{V}$ ce qui n'est pas.

20. $\mathrm{rg}(u-v)=\mathrm{rg}(\mathrm{U}-\mathrm{V})=1$ et le théorème du rang donne $\dim\big(\mathrm{Ker}(u-v)\big)=n-1$: $\boxed{\text{H est un hyperplan de E}}$.

21. **a)** Si on avait $\mathrm{F}\subset\mathrm{H}$ alors $\forall x\in\mathrm{F}$, $(u-v)(x)=0$ donc $\forall x\in\mathrm{F}$, $u(x)=v(x)$ c'est-à-dire que $u_\mathrm{F}=v_\mathrm{F}$. On a donc $\chi_{u_\mathrm{F}}=\chi_{v_\mathrm{F}}$. Posons $\mathrm{P}=\chi_{u_\mathrm{F}}=\chi_{v_\mathrm{F}}$, on a $\deg\mathrm{P}=\dim\mathrm{F}\geqslant 1$ et P divise χu et χv ce qui contredit le fait que χ_u et χ_v sont premiers entre eux. Donc $\boxed{\mathrm{F}\not\subset\mathrm{H}}$.

b) ◇ On a donc $\mathrm{F}\neq\mathrm{F}\cap\mathrm{H}$ donc $\dim\mathrm{F}>\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})$ et donc $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{H})=\dim\mathrm{H}+\dim\mathrm{F}-\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})>\dim\mathrm{H}=n-1$ donc $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{H})=n$ et $\boxed{\mathrm{F}+\mathrm{H}=\mathrm{E}}$.

◇ Notons $p=\dim\mathrm{F}$. Soit $\mathscr{B}_\mathrm{F}=\big(u_1,\dots,u_p\big)$ une base de F, $\mathscr{B}_\mathrm{H}=\big(v_1,\dots,v_{n-1}\big)$ une base de H. Tout élément de E s'écrit $x=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\,u_i+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\mu_j\,v_j$ donc $\big(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_{n-1}\big)$ est génératrice de E et $\big(u_1,\dots,u_p\big)$ est libre donc le théorème de la base incomplète montre que
$\boxed{\text{on peut compléter } \mathscr{B}_\mathrm{F} \text{ par des vecteurs de H en une base } \mathscr{B}' \text{ de E}}$.

◇ On a donc $\mathscr{B}'=\big(u_1,\dots,u_p,u_{p+1},\dots,u_n\big)$ avec $u_k\in\mathrm{H}$ pour $k\geqslant p+1$. Or, si $x\in\mathrm{H}$, $u(x)=v(x)$ et F est stable par u et par v donc on a

$$\mathrm{Mat}\big(u,\mathscr{B}'\big)=\begin{bmatrix}\mathrm{A_1}&\mathrm{B}\\\mathrm{O}&\mathrm{C}\end{bmatrix}\qquad \mathrm{Mat}\big(v,\mathscr{B}'\big)=\begin{bmatrix}\mathrm{A_2}&\mathrm{B}\\\mathrm{O}&\mathrm{C}\end{bmatrix}\qquad \text{avec } \mathrm{A}_i\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K}).$$

Donc $\chi_\mathrm{C}\,|\,\chi_\mathrm{U}$, $\chi_\mathrm{C}\,|\,\chi_\mathrm{V}$ et $\deg(\chi_\mathrm{C})=n-p\geqslant 1$ puisque $\mathrm{F}\neq\mathrm{E}$, ce qui contredit le fait que χ_u et χ_v sont premiers entre eux. Donc $\boxed{\mathrm{F}=\mathrm{E}}$.

c) $\{0\}$ et E sont stables par u et par v et on vient de montrer que si F est stable par u et par v et $\mathrm{F}\neq\{0\}$ alors $\mathrm{F}=\mathrm{E}$. Donc $\boxed{\text{les seuls sous-espaces stables par } u \text{ et par } v \text{ sont E et } \{0\}}$.

22. **a)** Par définition, $\mathrm{G}_j=(u^j)^{-1}(\mathrm{H})$ et $\mathrm{U}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $u\in\mathrm{GL(E)}$ et donc $u^j\in\mathrm{GL(E)}$ donc $\dim\mathrm{G}_j=\dim\mathrm{H}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } j\in\mathbb{N},\ \mathrm{G}_j \text{ est un hyperplan de E}}$.

b) On a donc $\mathrm{G}_j=\mathrm{Ker}\,\varphi_j$ où φ_j est une forme linéaire non nulle sur E. On a alors $\dim\left(\bigcap\limits_{j=0}^{n-2}\mathrm{G}_j\right)=\dim\left(\bigcap\limits_{j=0}^{n-2}\mathrm{Ker}\,\varphi_j\right)=n-\mathrm{rg}(\varphi_0,$

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{j=0}^{n-2}\mathrm{G}_j\neq\{0\}}$.

c) Supposons le résultat faux, i.e $(e_0,\dots,e_{n-1})$ liée, et considérons comme le suggère l'énoncé, $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\{y,u(y),\dots,u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $\big(y,u(y),\dots,u^{p-1}(y)\big)$ est libre (p est bien défini car $\{k\geqslant 1 \text{ tq } \big(y,u(y),\dots,u^{k-1}(y)\big) \text{ est libre}\}$ est non vide car (y) est libre, et majoré par $n-1$).
Par définition de p, $\big(y,u(y),\dots,u^{p-1}(y)\big)$ est libre et $\big(y,u(y),\dots,u^{p-1}(y),u^p(y)\big)$ est liée donc $\exists(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1})\in\mathbb{K}^p$ tel que $u^p(y)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}\alpha_k\,u^k(y)$. Ceci montre que $u^p(y)\in\mathrm{F}$ et donc $u(\mathrm{F})=\mathrm{Vect}\{u(y),u^2(y),\dots,u^p(y)\}\subset\mathrm{F}$.
D'autre part, $\forall k\in[0,n-2]$, $y\in\mathrm{G}_k$ donc $u^k(y)\in\mathrm{H}$ et et donc $v\big(u^k(y)\big)=u\big(u^k(y)\big)$ donc, puisque $p-1\leqslant n-2$, $v(\mathrm{F})=\mathrm{Vect}\{u(y),u^2(y),\dots,u^p(y)\}=u(\mathrm{F})\subset\mathrm{F}$. On a donc F stable par u et par v avec $1\leqslant\dim\mathrm{F}\leqslant n-1$ ce qui impossible d'après **21.**. Donc $\boxed{\mathscr{B}'' \text{ est une base de E}}$.

d) On a $u(e_k)=e_{k+1}$ pour $k\in[0,n-2]$ donc $\mathrm{Mat}\big(u,\mathscr{B}''\big)=\mathrm{C_P}$ où $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}e_k^*\big(u(e_{n-1})\big)\mathrm{X}^k$. Mais alors, d'après **2.**, $\mathrm{P}=(-1)^n\chi_u$ donc $\mathrm{C_P}=\mathrm{C_U}$. D'autre part, comme vu au **(c)**, $\forall k\in[0,n-2]$, $v(e_k)=u(e_k)=e_{k+1}$ donc $\mathrm{Mat}\big(v,\mathscr{B}''\big)$ est aussi une matrice compagnon et, de même que ci-dessus, c'est $\mathrm{C_V}$.

On a donc $\boxed{\mathrm{Mat}\big(u,\mathscr{B}''\big)=\mathrm{C_U}\quad\text{et}\quad\mathrm{Mat}\big(v,\mathscr{B}''\big)=\mathrm{C_V}}$.

e) En notant P la matrice de passage de $\mathscr{B}''$ à $\mathscr{B}$, on a donc $\mathrm{U} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{C_U}\,\mathrm{P}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{C_V}\,\mathrm{P}$. On peut donc conclure que : $\boxed{\forall (\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right)^2, \quad \Big((*) \text{ et } \chi_u, \chi_v \text{ premiers entre eux}\Big) \Longrightarrow (**)}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆