SOUS-ESPACES DE $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ DONT LES ÉLÉMENTS ONT UN RANG MAJORÉ

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $r \in [\![1, n-1]\!]$. L'objet du problème est l'étude des sous-espaces vectoriels V de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont de rang $\leqslant r$. La première partie établit divers résultats utiles pour la suite ; dans la seconde, on majore la dimension de V par nr, et dans la troisième, on caractérise les sous-espaces V de dimension nr.

On identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On identifiera également une matrice $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé. Ainsi, on pourra noter :

$$\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathrm{AX} = 0\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \mathrm{A} = \{\mathrm{AX} \text{ tq } \mathrm{X} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

A - Résultats préliminaires

Les questions de cette partie sont indépendantes entre elles. Les résultats obtenus et les notations introduites seront utilisées dans la suite du problème.

A.1 **a)** Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t\mathrm{XX} = 0$ si et seulement si $\mathrm{X} = 0$.

b) Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\mathrm{M}) = \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{MM})$.

A.2 Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $\mathrm{C} \in \mathbb{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathbb{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. On définit la matrice M par sa représentation par blocs

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}.$$

a) Soient $\mathrm{X} \in \mathbb{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Y} \in \mathbb{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$. On considère le vecteur colonne $\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \end{bmatrix}$.

Écrire les relations entre A B, C, D, X et Y traduisant l'appartenance de Z à Ker(M), sous la forme $\mathrm{X} = \mathrm{SY}$ et $\mathrm{TY} = 0$, où S et T sont deux matrices à déterminer.

b) Montrer que les espaces Ker(M) et $\operatorname{Ker}(\mathrm{D} - \mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B})$ ont même dimension.

c) Montrer que $\operatorname{rg}(\mathrm{M}) \geqslant r$.

Montrer que $\operatorname{rg}(\mathrm{M}) = r$ si et seulement si $\mathrm{D} = \mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B}$.

A.3 Démontrer que l'ensemble

$$\mathrm{W}_r = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{B} \\ {}^t\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{bmatrix} \text{ tq } \mathrm{A} \in \mathbb{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{B} \in \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension.

A.4 **a)** Démontrer que l'ensemble

$$\mathrm{W}'_r = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{B} \\ {}^t\mathrm{C} & 0 \end{bmatrix} \text{ tq } \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension.

b) Soient $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ deux éléments de W'_r :

$$\mathrm{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{B}_1 \\ {}^t\mathrm{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{B}_2 \\ {}^t\mathrm{C}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

On pose $\langle \mathrm{M}_1 | \mathrm{M}_2 \rangle = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 + {}^t\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2)$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur W'_r.

A.5 Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on note

$$\mathscr{K}_\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}\} \quad \text{et} \quad \mathscr{I}_\mathrm{G} = \{\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathrm{Im}\,\mathrm{A} \subset \mathrm{G}\}$$

Prouver que $\mathscr{K}_\mathrm{F}$ et $\mathscr{I}_\mathrm{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, dont on donnera les dimensions.

B - Détermination de la dimension maximale

Dans cette partie, V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{V}$, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leqslant r$.

B.1 On suppose de plus, dans cette question, que la matrice $\mathrm{J}_r = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ appartient à V.

a) Soient $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, telles que $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{B} \\ {}^t\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{bmatrix}$ soit dans V.

On note, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I}_r & \mathrm{B} \\ {}^t\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{bmatrix}$.

En utilisant les questions A.1.b et A.2.c, montrer que l'on a $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{B}\mathrm{B} = 0$ puis que $\mathrm{B} = 0$.

b) Prouver que $\dim \mathrm{V} \leqslant nr$ (utiliser le résultat de la question A.3).

B.2 **a)** Montrer que l'on a $\dim(\mathrm{V}) \leqslant nr$ dans le cas général.

Indication : On notera r' le rang maximum des matrices de V, et on se souviendra que toute matrice de rang r' est équivalente à la matrice $\mathrm{J}_{r'}$.

b) On note ici $\mathrm{V_L}$ [resp. $\mathrm{V_C}$] l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dont les $n-r$ dernières lignes [resp. colonnes] sont nulles.

Démontrer que $\mathrm{V_L}$ et $\mathrm{V_C}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, formés de matrices de rang $\leqslant r$, et de dimension nr (ainsi, l'inégalité précédente ne peut être améliorée).

C - Étude des sous-espaces de dimension maximale

C.1 Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$, on note $\widetilde{\mathrm{A}}$ sa matrice complémentaire. On rappelle la relation

$$\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{A}} = \widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{I}_r$$

a) Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ donnée. Démontrer qu'il existe r matrices de $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_0, \ldots, \mathrm{U}_{r-1}$, telles que l'on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{x\mathrm{I}_r - \mathrm{A}} = \sum_{k=0}^{r-1} x^k \mathrm{U}_k$$

b) On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P_A}(x) = \det(x\mathrm{I}_r - \mathrm{A})$. Démontrer que $\mathrm{P_A}$ est une fonction polynomiale de x, dont le terme dominant est x^r.

c) En déduire que $\mathrm{U}_{r-1} = \mathrm{I}_r$, et exprimer, lorsque c'est possible (on précisera), $(x\mathrm{I}_r - \mathrm{A})^{-1}$ en fonction des U_k.

d) Soient $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $\mathrm{D} \in \mathbb{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I}_r - \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ {}^t\mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$.

À l'aide des questions précédentes et de la question A.2.c, démontrer que, si M_λ est de rang $\leqslant r$ pour tout λ, alors $\mathrm{D} = 0$ et ${}^t\mathrm{C}\mathrm{B} = 0$.

Dans toute la suite, V désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{V}$, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leqslant r$ et tel que $\dim \mathrm{V} = nr$.

C.2 On suppose de plus, dans cette question, que la matrice $\mathrm{J}_r = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ appartient à V.

a) Montrer que tout élément M de V est de la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R}),\ B, C \in \mathbb{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}),\ \text{et } {}^tCB = 0$$

On notera par la suite $\mathscr{W}$ le sous-espace de W'_r formé de l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ lorsque la matrice M ci-dessus décrit V.

b) On considère le produit scalaire défini sur W'_r à la question A.4.b.

Montrer que, pour tout $M \in \mathscr{W}$, $\langle M | {}^tM \rangle = 0$.

En déduire que, pour tout couple $(M_1, M_2) \in \mathscr{W}^2$, $\langle M_1 | {}^tM_2 \rangle = 0$ puis que

$$\dim \mathscr{W} \leqslant r(n-r).$$

c) Démontrer que l'application de V dans $\mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathscr{W}$ définie par :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \left(A, \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}\right)$$

est un isomorphisme.

d) Prouver que, si U et V sont deux éléments non nuls de $\mathbb{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice $A \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ telle que la matrice (d'ordre $r+1$) $\begin{bmatrix} A & V \\ {}^tU & 0 \end{bmatrix}$ soit inversible (utiliser la question A.2.c).

e) Déduire de ce qui précède que, si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tC & 0 \end{bmatrix}$ appartient à V, alors $B = 0$ ou $C = 0$.

f) Prouver enfin que, soit $B = 0$ pour tout élément de V, soit $C = 0$ pour tout élément de V.

En déduire que $V = V_L$ ou $V = V_C$ (cf. question B.2.b).

C.3 On traite maintenant le cas général, c'est-à-dire qu'on désigne ici par V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour toute matrice $M \in V$, on a $\mathrm{rg}(M) \leqslant r$ et tel que $\dim V = nr$.

a) Prouver que V possède au moins une matrice de rang r.

b) Prouver que V est, soit de la forme $\mathscr{K}_F$, soit de la forme $\mathscr{I}_G$ (cf. question A.5).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆