CORRIGÉ DM N°4 : MATRICES MAGIQUES (inspiré de Centrale PSI 1997 et X 1968

PARTIE A : Exemples de matrices magiques d'ordre impair

```
> magique := proc (n)
> local A, i, j, k, i1, j1;
> A := Matrix(n, n, 0);
> i := 1; j := (1/2)*n+1/2;
> A[i, j] := 1;
> for k from 2 to n^2 do
>    if i = 1 then i1 := n else i1 := i-1 end if;
>    if j = n then j1 := 1 else j1 := j+1 end if;
>    if A[i1, j1] = 0 then i := i1; j := j1 else
>       if i = n then i := 1 else i := i+1 end if
>     end if;
>     A[i, j] := k
> end do;
> return A
> end proc;
> magique(3), magique(5);
```

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

PARTIE B : Étude de $\mathscr{E}$

1.
- $\mathscr{E} \neq \emptyset$, car la matrice nulle appartient à $\mathscr{E}$.
- Soient $\mathrm{A} = (a_{ij})$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})$ dans $\mathscr{E}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La matrice $\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}$ a pour coefficients $\lambda a_{ij} + b_{ij}$ et l'on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \ , \ \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik} + b_{ik}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} = \lambda d(\mathrm{A}) + d(\mathrm{B})$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \ , \ \sum_{h=1}^{n}(\lambda a_{hj} + b_{hj}) = \lambda \sum_{h=1}^{,} a_{hj} + \sum_{h=1}^{n} b_{hj} = \lambda d(\mathrm{A}) + d(\mathrm{B})$$

  ce qui prouve que $\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}$ appartient à $\mathscr{E}$: $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$.
- Le calcul ci-dessus prouve en outre que $d(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda d(\mathrm{A}) + d(\mathrm{B})$: d est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

2. **a)** Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n$. Soient $\mathrm{B} = \mathrm{AJ}_n$ et $\mathrm{C} = \mathrm{J}_n\mathrm{A}$, avec $\mathrm{B} = (b_{ij})$ et $\mathrm{C} = (c_{ij})$. Par définition du produit matriciel, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times 1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad \text{et} \quad c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} 1 \times a_{hj} = \sum_{h=1}^{n} a_{hj}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \in \mathscr{E} &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ b_{ij} = c_{ij} = \lambda \\ &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathrm{AJ}_n = \mathrm{J}_n\mathrm{A} = \lambda \mathrm{J}_n \end{aligned}$$

De plus, dans ce cas, le calcul précédent donne $\lambda = d(\mathrm{A})$.

b)
- $(\mathscr{E}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$
- $\mathrm{I}_n \in \mathscr{E}$
- Pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{E}^2$: $(\mathrm{AB})\mathrm{J}_n = \mathrm{A}(\mathrm{BJ}_n) = \mathrm{A}(d(\mathrm{B})\mathrm{J}_n) = d(\mathrm{B})\mathrm{AJ}_n = d(\mathrm{B})d(\mathrm{A})\mathrm{J}_n$, et, de la même façon, $\mathrm{J}_n(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{A})d(\mathrm{B})\mathrm{J}_n$.
  Cela prouve, d'après la question précédente : $\mathrm{AB} \in \mathscr{E}$.
  Donc $\mathscr{E}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n$ et le calcul précédent donne aussi $d(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{A})d(\mathrm{B})$ pour $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{E}$.
  Puisque l'on a aussi $d(\mathrm{I}_n) = 1$, d est un morphisme de l'algèbre $\mathscr{E}$.

c) • Soit $A \in \mathscr{E}$, inversible dans $\mathscr{M}_n$, et A^{-1} son inverse.
L'égalité $AJ_n = J_nA = d(A)J_n$ implique $J_n = A^{-1}AJ_n = d(A)A^{-1}J_n$ et $J_n = J_nAA^{-1} = d(A)J_nA^{-1}$.
On en déduit $\underline{d(A) \neq 0}$ (car $J_n \neq 0$!), et $A^{-1}J_n = J_nA^{-1} = \dfrac{1}{d(A}J_n$, ce qui prouve que $\underline{A^{-1} \in \mathscr{E} \text{ et } d(A^{-1}) = \dfrac{1}{d(A)}}$.

• La réciproque est fausse : par exemple, J_n appartient à $\mathscr{E}$, $d(J_n) = n \neq 0$, mais J_n n'est pas inversible car elle est de rang 1 et $n \geqslant 2$.

d) • Puisque $J_n \in \mathscr{E}$ et $d(J_n) = n$, on a $J_n^2 = nJ_n$.
• On en déduit :

$$BC = \left(A - \frac{d(A)}{n}\right)\left(\frac{d(A)}{n}J_n\right) = \frac{d(A)}{n}AJ_n - \left(\frac{d(A)}{n}\right)^2 J_n^2 = \frac{d(A)}{n}d(A)J_n - \left(\frac{d(A)}{n}\right)^2 nJ_n = 0$$

soit $\underline{BC = 0}$, et un calcul semblable donne aussi $\underline{CB = 0}$.
• B et C commutent donc, et la formule du binôme donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \ , \ A^p = (B+C)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k C^{p-k} = B^p + C^p + 0$$

(car $B^kC^{p-k} = 0$ si $1 \leqslant k \leqslant p-1$), soit : $\underline{A^p = B^p + C^p}$.

3. a) • $\mathscr{G}$ est le noyau de la forme linéaire d : c'est donc un hyperplan de $\mathscr{E}$.
• $\mathscr{H}$ est la droite vectorielle engendrée par J_n ; puisque $J_n \notin \mathscr{G}$ (car $d(J_n) = n \neq 0$), on a directement d'après le cours : $\mathscr{E} = \mathscr{G} \oplus \mathscr{H}$.

Rem : on pouvait aussi utiliser la question précédente, en écrivant, si $A \in \mathscr{E}$: $A = \left(A - \dfrac{d(A)}{n}J_n\right) + \dfrac{d(A)}{n}J_n$, avec $A - \dfrac{d(A)}{n}J_n \in \mathscr{G}$ et $\dfrac{d(A)}{n}J_n \in \mathscr{H}$ ...

b) Pour $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, on a :

$$A_{rs} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \uparrow & & & \\ & & s & & & \end{array} & \end{array}$$

• $A_{rs} \in \mathscr{G}$ de façon évidente.
• Soient λ_{rs} des réels tels que $\displaystyle\sum_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2} \lambda_{rs}A_{rs} = 0$.
Alors, pour tout $i \geqslant 2$ et tout $j \geqslant 2$, l'élément situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne de la matrice $\displaystyle\sum_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2} \lambda_{rs}A_{rs}$ est égal à λ_{ij}. Il en résulte $\lambda_{ij} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, et, ainsi, la famille $(A_{rs})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ est libre.

• Soit alors $A = (a_{ij}) \in \mathscr{G}$, et soit B la matrice $B = \displaystyle\sum_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2} a_{rs}A_{rs}$. On a alors :

— pour $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$; $b_{ij} = a_{ij}$.
— pour $i \geqslant 2$ et $j = 1$: le terme d'indice $(i,1)$ de A_{rs} vaut -1 si $i = r$ et 0 sinon. Donc $b_{i1} = \displaystyle\sum_{s=2}^{n}(-a_{is}) = a_{i1}$ puisque $d(A) = 0$.
— De même, pour $j \geqslant 2$ et $i = 1$: $b_{1j} = a_{1j}$.
— Enfin, pour $i = j = 1$: le terme d'indice $(1,1)$ de A_{rs} vaut 1 donc

$$b_{11} = \sum_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2} a_{rs} = \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{s=2}^{n} a_{rs}\right) = \sum_{r=2}^{n}(-a_{r1}) = -(-a_{11}) = a_{11} \text{ toujours puisque } d(A) = 0.$$

Finalement, $b_{ij} = a_{ij}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, soit $B = A$. Ainsi, si $A \in \mathscr{G}$, $A = \displaystyle\sum_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2} a_{rs}A_{rs}$, ce qui prouve que la famille $(A_{rs})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ engendre $\mathscr{G}$.

- Cette famille forme donc une base de $\mathscr{G}$. On en déduit :

$$\dim \mathscr{G} = (n-1)^2 \quad \text{puis} \quad \dim \mathscr{E} = (n-1)^2 + 1$$

c) dans le cas $n = 2$, $\dim \mathscr{E} = 2$. On trouve alors facilement (soit en utilisant le résultat précédent, soit par un calcul direct), que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

PARTIE C : Étude de $\mathscr{F}$ dans le cas général

1. et 2.b

- On peut commencer par démontrer que l_1 et l_2 sont des formes linéaires (non nulles) sur $\mathscr{E}$.
  En effet, en notant E_{ij}^* la base duale de la base canonique de $\mathscr{M}_n$ (de telle sorte que $E_{ij}^*(A) = a_{ij}$), on a $l_1 = d - \sum_{i=1}^{n} E_{ii}^*$ et $l_2 = d - \sum_{i=1}^{n} E_{i,n+1-i}^*$. Ainsi, l_1 et l_2 sont des combinaisons linéaires de formes linéaires, ce sont donc aussi des formes linéaires.
- On a alors $\mathscr{F} = \operatorname{Ker} l_1 \cap \operatorname{Ker} l_2$: $\mathscr{F}$ est l'intersection de deux hyperplans de $\mathscr{E}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

2. a) Question traitée en classe ! , à revoir pour certains (on peut, soit utiliser la formule de Grassmann, soit directement les résultats du cours sur les équations linéaires).

b) voir ci-dessus

c) Soit $n > 2$. Si on a $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = 0$, alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, $\lambda_1 l_1(M) + \lambda_2 l_2(M) = 0$. En particulier, on a

$$\lambda_1 l_1(I_n) + \lambda_2 l_2(I_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 l_1(A_{nn}) + \lambda_2 l_2(A_{nn}) = 0$$

Or : $l_1(I_n) = 1 - n$; $\quad l_1(A_{nn}) = -2$; $\quad l_2(I_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$ $\quad$ et $\quad l_2(A_{nn}) = 2$.

On obtient alors facilement, dans tous les cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, donc l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes.

d)
- Les hyperplans $\operatorname{Ker} l_1$ et $\operatorname{Ker} l_2$, pour $n > 2$, sont donc distincts ; d'après le résultat de 2.a, on en tire :

$$\dim \mathscr{F} = \dim(\operatorname{Ker} l_1 \cap \operatorname{Ker} l_2) = \dim \mathscr{E} - 2 = (n-1)^2 - 1 = n(n-2)$$

- Pour $n = 2$, en reprenant le résultat de B.3.c, on trouve que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 1 (dans le cas $n = 2$, les formes linéaires l_1 et l_2 sont proportionnelles).

PARTIE D : Étude de $\mathscr{F}$ dans le cas $n = 3$

1. a) Soit $A \in \mathscr{E}$. Il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $A = aA_{22} + bA_{23} + cA_{32} + dA_{33} + eJ_3$, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c+d+e & -a-c+e & -b-d+e \\ -a-b+e & a+e & b+e \\ -c-d+e & c+e & d+e \end{pmatrix}$$

On a alors : $A \in \mathscr{F} \iff l_1(A) = l(2)A = 0 \iff a = 0$ et $b + c + 2d = 0$.
Ainsi, A s'écrit :

$$\begin{aligned} A &= bA_{23} + cA_{32} - \frac{b+c}{2}A_{33} + J_3 \\ &= \frac{b}{2}(2A_{23} - A_{33}) + \frac{c}{2}(2A_{32} - A_{33}) + J_3 \end{aligned}$$

$\mathscr{F}$ est donc engendré par la famille $\{2A_{23} - A_{33}, 2A_{32} - A_{33}, J_3\}$. Puisque $\dim \mathscr{F} = 3$, ces trois matrices forment une base de $\mathscr{F}$.

Rem : Autre démonstration possible : montrer que ces trois matrices sont bien des éléments de $\mathscr{F}$ et qu'elles forment un système libre...La méthode précédente a cependant l'avantage de montrer comment on obtient cette base !

b) Compte tenu du calcul précédent, les matrices A de $\mathscr{F}$ sont donc celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{(b+c)}{2}+e & -c+e & -b+\frac{(b+c)}{2}+e \\ -b+e & e & b+e \\ \frac{(b+c)}{2}+e & c+e & -\frac{(b+c)}{2}+e \end{pmatrix}$$

puis, en posant $c'=e,\ b'=\frac{(b+c)}{2}$ et $a'=\frac{(b-c)}{2}$, on obtient bien les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} b'+c' & a'-b'+c' & -a'+c' \\ -a'-b'+c' & c' & a'+b'+c' \\ a'+c' & b'-a'+c' & -b'+c' \end{pmatrix}$$

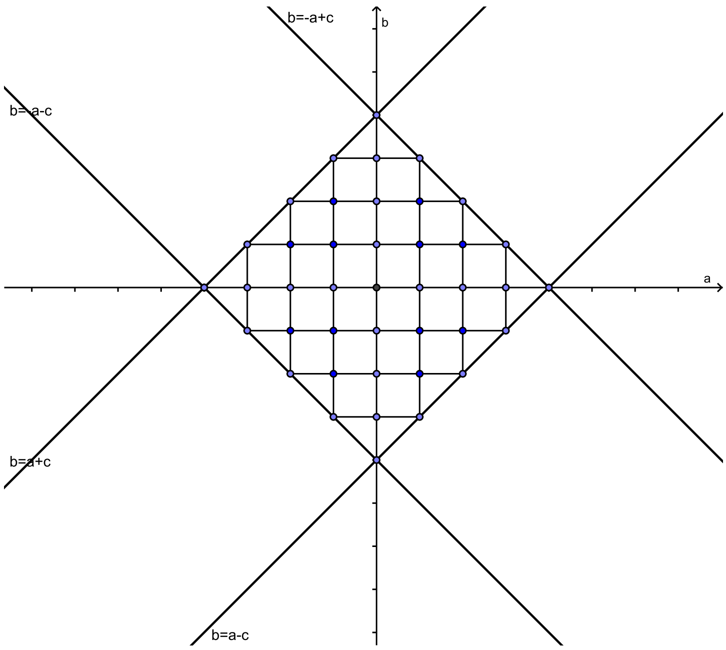
2. **a)** Si $X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, en reprenant l'expression précédente de A, on a $AX=3cX=d(A)X$, donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $d(A)$.

b) Si λ,μ désignent les deux autres valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de A, on a $\mathrm{tr}(A)=d(A)+\lambda+\mu$ d'où $\lambda+\mu=0$.

3. Pour que la matrice définie en 1.b ait tous ses coefficients dans $\mathbb{N}$, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} c\in\mathbb{N} & (a,b)\in\mathbb{Z}^2 \\ -c\leqslant a\leqslant c & -c\leqslant b\leqslant c \\ -c\leqslant a+b\leqslant c & -c\leqslant a-b\leqslant c \end{cases}$$

Cela équivaut à dire que le point $M(a,b)$ est un point à coordonnées entières situé à l'intérieur du carré délimité par les droites d'équation $b=a-c,\ b=a+c,\ b=-a+c$ et $b=-a-c$:



4. • Si A est un carré magique, on a $d(A)=3c$ donc $d(A)$ doit être un multiple de 3. Donc, si on se donne $d(A)$, et si ce nombre n'est pas multiple de 3, il n'y a pas de solution.

• Supposons désormais $d(A)$ multiple de 3, et soit $c=\dfrac{d(A)}{3}$. Pour déterminer le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}$, il suffit de compter le nombre de points à coordonnées entières dans le carré ci-dessus ; on peut les dénombrer ligne par ligne :
— il y en a 1 sur les droites d'équation $a=c$ et $a=-c$.
— il y en a 3 sur les droites d'équation $a=c-1$ et $a=-c+1$
— etc...
— enfin, il y en a $2c+1$ sur la droite d'équation $a=0$
soit au total : $2(1+3+\ldots+(2c-1))+2c+1=2c^2+2c+1$.

Il y a a $2c^2+2c+1$ (avec $c=\dfrac{d(A)}{3}$) carrés magiques $3\times$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

- Le nombre de carrés magiques à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, en supposant toujours $d(A)$ multiple de 3 et, de plus, non nul, s'obtient alors en retirant de la solution au problème précédent les points se trouvant sur le pourtour du carré (car il faut que les inégalités obtenues en D.3 soient strictes).
Il reste donc $(2c^2+2c+1)-4c = 2c^2-2c+1$ solutions.

5.
- Si A est une matrice qui convient, on a nécessairement $d(A) = \dfrac{\sum\limits_{i,j} a_{ij}}{3} = \dfrac{1+2+\ldots+9}{3} = 15$, donc $c=5$. Cela fait donc au maximum 41 solutions possibles.
- Parmi celles-ci, il faut ôter celles où l'on aurait $a=0$ ou $b=0$ ou $a=b$ ou $a=-b$, car alors, dans A, on aurait deux fois la même valeur.
- D'autre part, quand on change a en $-a$, A est changée en ${}^t\!A$ (et, si A est solution, ${}^t\!A$ aussi). On peut donc se contenter d'examiner le cas $a>0$.
- finalement, il ne reste plus qu'à examiner les 8 cas :

$$(a,b) \in \{(1,2),(1,3),(1,-2),(1,-3),(2,1),(2,-1),(3,1)(3,-1)\}$$

Parmi ceux-ci, seuls les couples $(1,3),(1,-3),(3,1)(3,-1)$ conviennent, ce qui donne au final <u>huit solutions</u> (à chaque fois A et ${}^t\!A$).

On obtient $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, les 7 autres solutions s'en déduisant par les isométries du carré.

<u>PARTIE E : Étude d'un système générateur de $\mathscr{E}$</u>

1. **a)** f_σ linéaire est immédiat...

b) En notant $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées de e_j, on a $x_i = \delta_{ij}$. $f_\sigma(e_j)$ est donc le vecteur de coordonnées $x_{\sigma(i)} = \delta_{\sigma(i),j}$. Les coordonnées de ce vecteur sont donc toutes nulles, sauf celle d'indice i tel que $\sigma(i)=j$, soit $i=\sigma^{-1}(j)$, qui est égale à 1.
On a donc bien $\underline{f_\sigma(e_j) = e_{\sigma^{-1}(j)}}$.

2. **a)** La i-ème coordonnée de $f_{\sigma(e_j)}$ est, on vient de le voir, égale à $\delta_{\sigma(i),j}$. La matrice $P_\sigma = (p_{ij})$ est donc telle que $p_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$.
On en déduit facilement que $\underline{P_\sigma \in \mathscr{E} \text{ et } d(P_\sigma)=1}$.

b)
- $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma\left[f_{\sigma'}(e_j)\right] = f_\sigma\left[e_{\sigma'^{-1}(j)}\right] = e_{\sigma^{-1}\circ\sigma'^{-1}(j)} = e_{(\sigma'\circ\sigma)^{-1}(j)} = f_{\sigma'\circ\sigma}(e_j)$
d'où $\underline{P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma'\circ\sigma}}$.
- On en tire : $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = I_n$, donc P_σ est inversibles, d'inverse $P_{\sigma^{-1}}$.
- Enfin, la formule du produit matriciel donne :

$$({}^tP_\sigma P_\sigma)_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{ki}p_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma(k),i}\delta_{\sigma(k),j} = \delta_{ij}$$

ce qui montre que ${}^tP_\sigma P_\sigma = I_n$. Ainsi $\underline{(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma}$.

c) Les propriétés ci-dessus permettent facilement de montrer que l'ensemble $(\mathscr{P},\times)$ est un *sous-groupe* du groupe linéaire $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

3.
- Soit σ la permutation circulaire telle que $\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ldots,\sigma(n-1)=n,\ \sigma(n)=1$; l'endomorphisme f_σ associé est donc tel que $f_\sigma(e_1)=e_n,\ f_\sigma(e_2)=e_1,\ldots,f_\sigma(e_n)=e_{n-1}$.
On aura alors, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$: $(\mathrm{Id}_E + f_\sigma + f_{\sigma^2} + \cdots + f_{\sigma^{n-1}})(e_j) = \sum\limits_{i=1}^n e_i$.
Cela signifie que l'endomorphisme canoniquement associé à J_n est égal à $\mathrm{Id}_E + f_\sigma + f_{\sigma^2} + \cdots + f_{\sigma^{n-1}}$, ou encore que la matrice J_n est égale à $I_n + P_\sigma + P_{\sigma^2} + \cdots + P_{\sigma^{n-1}}$: J_n appartient donc au sous-espace vectoriel $\mathscr{Q}$ engendré par les matrices de permutation.
- Soient $(r,s)\in[\![2,n]\!]^2$. Soient alors σ_1 et σ_2 des permutations (elles ne sont pas uniques) telles que :

$$\begin{cases} f_{\sigma_1}(e_j) = f_{\sigma_2}(e_j) \text{ si } j\neq 1 \text{ et } j\neq s \\ f_{\sigma_1}(e_1) = e_1 \quad ; \quad f_{\sigma_1}(e_s) = e_r \quad ; \quad f_{\sigma_2}(e_1) = e_r \quad ; \quad f_{\sigma_2}(e_s) = e_1 \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que $A_{rs} = P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2}$, donc $A_{rs} \in \mathscr{Q}$.

- Les matrices A_{rs} et J_n engendrent $\mathscr{E}$, donc $\mathscr{E} \subset \mathscr{Q}$. Et les matrices P_σ appartiennent à $\mathscr{E}$, donc $\mathscr{Q} \subset \mathscr{E}$. Finalement, $\underline{\mathscr{E} = \mathscr{Q}}$.

4. **a)** i. évident

ii. Supposons que l'on ait $P = \alpha A + \beta B$, avec A, B distinctes dans $\mathscr{D}$, $P = P_\sigma$ dans $\mathscr{P}$ et α, β positifs.
Notons d'abord que, puisque $d(P) = \alpha d(A) + \beta d(B)$, et que $d(P) = d(A) = d(B) = 1$, on a $\alpha + \beta = 1$.
Supposons, par l'absurde, $\alpha\beta \neq 0$. En posant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, puisque, pour $j \neq \sigma(i)$, l'élément p_{ij} de la matrice P_σ est nul, on aurait

$$\forall j \neq \sigma(i)\ ,\ \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} = 0$$

Puisque $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a_{ij} \geqslant 0$ et $b_{ij} \geqslant 0$, on aurait : $\forall j \neq \sigma(i)$, $a_{ij} = b_{ij} = 0$, et, puisque $d(A) = d(B) = 1$, on aurait aussi $a_{i,\sigma(i)} = b_{i,\sigma(i)} = 1$, d'où $A = B = P_\sigma$: contradiction.
On a donc $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, soit : $\underline{P = A \text{ ou } P = B}$.

b) Puisque l'ensemble des matrices P_σ engendre $\mathscr{E}$, et que $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}$, toute matrice A de $\mathscr{D}$ est combinaison linéaire de matrices de la forme P_σ. D'autre part, $\dim \mathscr{E} = (n-1)^2 + 1$, on peut donc en fait trouver une famille génératrice de $\mathscr{E}$ donc de $\mathscr{D}$ formée de $(n-1)^2 + 1$ éléments $P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \ldots P_{\sigma_{(n-1)^2+1}}$
Pour toute matrice A de $\mathscr{D}$, il existe donc $m \leqslant (n-1)^2 + 1$ et m réels λ_i (que l'on peut supposer non nuls : si un terme est nul, on ne l'écrit pas !) tels que $A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_{\sigma_k}$ (en fait, les P_{σ_i} ne dépendent pas de A, contrairement à ce que laissait croire l'énoncé).

Enfin puisque d est linéaire, on aura alors $d(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k d(P_{\sigma_k}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k$ d'où $\underline{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1}$.

Rem : On peut en fait prouver que les λ_k sont positifs. Cette question montre alors que toute matrice A de $\mathscr{D}$ est barycentre à coefficients positifs de matrices de permutation, soit, en termes plus savants, que $\mathscr{D}$ est l'enveloppe convexe de $\mathscr{P}$ (théorème de Birkhoff). La question 4.a, montre, elle, que les points extrémaux de ce convexe sont les matrices de permutation...

5.
- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{D}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant k < k' \leqslant n} a_{ik} a_{ik'}$$

Les a_{ik} étant tous positifs ou nuls, on en déduit : $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right)^2 = d(A)^2 = 1$.

- En reprenant le calcul précédent, on voit qu'il y a égalité si et seulement si tous les produits $a_{ik} a_{ik'}$ sont nuls si $k \neq k'$, donc si tous les a_{ik} sont nuls sauf l'un d'entre eux, nécessairement égal à 1.
- Si $A \in \mathscr{P}$, alors $A = P_\sigma$ pour une certaine permutation σ, donc $A^{-1} = P_{\sigma^{-1}} \in \mathscr{P} \subset \mathscr{D}$, donc P est inversible dans $\mathscr{D}$.
- Réciproquement, soit $A \in \mathscr{D}$, inversible dans $\mathscr{D}$, c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathscr{D}$ telle que $AB = I_n$.

  On a alors, en utilisant la formule du produit matriciel : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$.

  Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right)$$

  En particulier, pour $i = j$, on obtient, puisque $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = 1$: $1 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2\right)$, donc, compte tenu de l'inégalité vue au début, on a nécessairement $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$. Donc tous les a_{ik} sont nuls, sauf l'un d'entre eux qui est égal à 1.
  La matrice A a donc chaque ligne formée de termes nuls, sauf un qui est égal à 1 ; il en est de même pour ses colonne (considérer la transposée). Donc <u>A est une matrice de permutation</u>.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆