DM N^{o}3 (pour le 14/10/2008)

Matrices réductibles et irréductibles. Permanents. Théorème de Frobenius et König.
Matrices magiques et bistochastiques. Théorème de Birkhoff. Th. d'Alexsandrov. Th. d'Egorychev

NOTATIONS ET DÉFINITIONS:

- Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et, plus généralement, si $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, a_{ij} étant l'élément de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de A. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
- $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$ désignera l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels tous positifs ou nuls.
- On note E_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A telles que les $2n$ nombres réels
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^{n} a_{hj} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n$$
soient tous égaux, et on note alors $d(A)$ leur valeur commune.
(E_n est l'ensemble des <u>matrices pseudo-magiques d'ordre n</u>).
- E_n^+ désigne l'ensemble $E_n \cap \mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$.
- Ω_n désigne l'ensemble : $\Omega_n = \{A \in E_n^+ \ , \ d(A) = 1\}$. Les éléments de Ω_n sont appelés les <u>matrices bistochastiques</u>.
- Σ_n désigne le groupe symétrique d'ordre n, i.e le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.
- Soit $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\sigma \in \Sigma_n$.
On appellera <u>matrice de permutation</u> associée à σ la matrice P_σ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,
$$\text{pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}.$$
On a donc : $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
- On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est <u>irréductible</u> si pour tout couple (S,T) de parties non vides de $[\![1,n]\!]$ telles que $S \cap T = \emptyset$ et $S \cup T = [\![1,n]\!]$, il existe un élément $a_{ij} \neq 0$ avec $i \in S$ et $j \in T$.
Dans le cas contraire, A est dite <u>réductible</u>.
Ainsi, dire que A est réductible signifie qu'il existe une partition (S,T) de $[\![1,n]\!]$ (avec S et T non vides) telle que : $\forall (i,j) \in S \times T$, $a_{ij} = 0$.

PARTIE A :

1°) **a)** Soient $\sigma,\sigma' \in \Sigma_n$.

i. Montrer que : $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$.

ii. Montrer que P_σ est inversible et que $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

iii. Montrer que : $(P_\sigma)^{-1} = {}^t P_\sigma$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_\sigma, P_{\sigma'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices associées aux permutations $\sigma,\sigma' \in \Sigma_n$.
On note $B = P_\sigma A P_{\sigma'} = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Montrer que $b_{ij} = a_{\sigma^{-1}(i)\sigma'(j)}$.
Par quelles opérations sur les lignes et les colonnes de A la matrice B est-elle obtenue?

2°) **a)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$soit extraite de A.
Montrer qu'il existe $F \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et des permutations $\sigma,\sigma' \in \Sigma_n$ telles que :

$$P_\sigma A P_{\sigma'} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$$

b) En déduire que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est réductible, alors il existe des matrices de permutation $P_\sigma, P_{\sigma'}$, un entier $p \in [\![1,n-1]\!]$ et des matrices $F \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$,
$H \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_\sigma A P_{\sigma'} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$$

c) Plus précisément, montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est réductible *si et seulement si* il existe une matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ soit de la forme :

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$$

où $F \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

3°) On veut montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si la propriété (P) suivante est vérifiée :

(P) pour tout couple (i,j) d'indices distincts de $[\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \neq 0$ ou alors il existe un entier s et des indices $i_1,i_2,\ldots,i_s$ tels que le produit $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\ldots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sj}$ soit non nul.

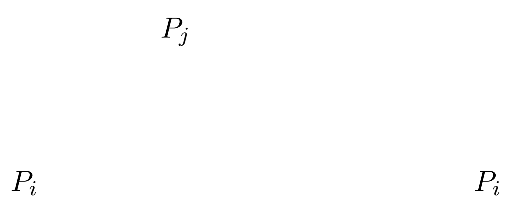
a) Établir que la condition est suffisante [on pourra raisonner par l'absurde].

b) On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible. Pour chaque indice $i \in [\![1,n]\!]$, on définit X_i comme l'ensemble des indices $j \in [\![1,n]\!]^2$ tels que :

(1) $j \neq i$
et (2) soit $a_{ij} \neq 0$
soit il existe $i_1,\ldots,i_s$ tels que le produit $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\ldots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sj}$ soit non nul.

Montrer que $X_i \neq \emptyset$ [on pourra raisonner par l'absurde].
Montrer que $X_i = [\![1,n]\!] \backslash \{i\}$ [on pourra raisonner par l'absurde], et en déduire que la condition est nécessaire.

4°) Le concept d'irréductibilité peut être illustré graphiquement .
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{P_i,\, i \in [\![1,n]\!]\}$ un ensemble de n points distincts dans le plan.
Pour chaque couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $a_{ij} \neq 0$, on trace une flèche allant de P_i vers P_j. Si a_{ij} et a_{ji} sont tous les deux non nuls, il y aura donc une flèche de P_i vers P_j et une autre de P_j vers P_i. Enfin, si $a_{ii} \neq 0$, on pourra tracer une boucle allant de P_i vers lui-même.



On associe ainsi à chaque matrice ce qu'on appelle un <u>graphe orienté</u>.

Représentez les graphes associés aux deux matrices suivantes :

$$A_1 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété (P), donner une interprétation graphique du caractère réductible ou irréductible d'une matrice. Étudiez les cas de A_1 et A_2.

PARTIE B : Permanents

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le <u>permanent</u> de A par :

$$\mathbf{per}(A) \;=\; \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Pour $(C_1,C_2,\dots,C_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$, on définit le permanent $\mathbf{per}(C_1,C_2,\dots,C_n)$ comme étant celui de la matrice d'ordre n dont $C_1,\dots,C_n$ sont les colonnes.

1°) **a)** Démontrer que l'application $\mathbf{per} : (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme n-linéaire symétrique.

b) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{per}(A) = \mathbf{per}({}^tA)$.

2°) *Développement selon une rangée.*

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1,n]\!] \,, \quad \mathbf{per}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{per}(A_{ij}) \\ \forall i \in [\![1,n]\!] \,, \quad \mathbf{per}(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{per}(A_{ij}) \end{cases}$$

3°) *Permanent d'une matrice triangulaire par blocs.*

a) Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$, $F \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $A = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que : $\mathbf{per}(A) = \mathbf{per}(F)\mathbf{per}(H)$.

b) En déduire que si A est triangulaire inférieure par blocs, c'est-à-dire de la forme
$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \text{\Large 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & \dots & A_{ll} \end{pmatrix}$, où les A_{ii} sont des matrices carrées, alors $\mathbf{per}(A) = \displaystyle\prod_{i=1}^{l} \mathbf{per}(A_{ii})$.

4°) *Effet d'une matrice de permutation.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_\sigma,P_{\sigma'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices associées aux permutations $\sigma,\sigma' \in \Sigma_n$.
Soit $B = P_\sigma A P_{\sigma'}$.

Montrer que : $\mathbf{per}(A) = \mathbf{per}(B)$.

PARTIE C : Théorème de Frobenius et König

1°) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $s \in [\![1,n]\!]$ tels que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n+1-s}(\mathbb{R})$ soit extraite de A.

En utilisant A.2.a et B.3.a, montrer que $\mathbf{per}(A) = 0$.

2°) On se propose de démontrer par récurrence sur n la propriété suivante :

si A appartient à $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$ et si $\mathbf{per}(A) = 0$, alors il existe $s \in [\![1,n]\!]$ tel que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n+1-s}(\mathbb{R})$ soit extraite de A.

Examiner le cas $n = 2$.

On suppose la propriété établie pour tout entier $\leqslant n$. Soit alors $A \in \mathcal{M}_{n+1}^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{per}(A) = 0$ et $A \neq 0$. Il existe alors $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$ tel que $a_{ij} > 0$.

a) Montrer : $\mathbf{per}(A_{ij})) = 0$.

b) En déduire qu'il existe $s_1 \in [\![1,n]\!]$, $F \in \mathcal{M}_{s_1}^+(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{n+1-s_1,s_1}(\mathbb{R})$ à termes $\geqslant 0$, $H \in \mathcal{M}_{n+1-s_1}^+(\mathbb{R})$ et des matrices de permutation $P_\sigma, P_{\sigma'}$ avec $\sigma,\sigma' \in \Sigma_{n+1}$ tels que :

$$P_\sigma A P_{\sigma'} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix} \text{ avec } \mathrm{per}(F) = 0 \text{ ou } \mathrm{per}(H) = 0$$

(utiliser l'hypothèse de récurrence et la question A.2).

c) Conclure (appliquer l'hypothèse de récurrence à F ou à G).

PARTIE D : Matrices magiques et bistochastiques; théorème de Birkhoff

1°) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que l'application d est une forme linéaire sur E_n.

2°) **a)** Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à E_n si et seulement si il existe un réel λ tel que $AJ_n = J_nA = \lambda J_n$. Exprimer alors λ en fonction de $d(A)$.

b) En déduire que E_n est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que l'application d est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

c) Si A est une matrice inversible de E_n, montrer que $d(A)$ est non nul, que A^{-1} appartient à E_n, et comparer $d(A)$ et $d(A^{-1})$.
Réciproquement, si A appartient à E_n et que $d(A)$ est non nul, la matrice A est-elle nécessairement inversible ?

3°) En utilisant le théorème de Frobenius et König et la question A.2, montrer que, pour tout $A \in \Omega_n$, $\mathbf{per}(A) > 0$.

4°) En déduire que, pour toute $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \Omega_n$, il existe une permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $a_{\sigma(j)j} > 0$.

5°) Soit $A \in \Omega_n$ une matrice bistochastique réductible; soit alors (S,T) une partition de $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall (i,j) \in S \times T$, $a_{ij} = 0$.
Montrer que : $\forall (i,j) \in S \times T$, $a_{ji} = 0$.

6°) Soit $A \in \Omega_n$.

a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})(X \neq 0)$ tel que $AX = X$.

b) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$, X ayant au moins deux composantes distinctes.
Montrer que A est réductible [on pourra considérer l'ensemble S des indices $i \in [\![1,n]\!]$ tels que $x_i = \min\limits_j x_j$].

c) Lorsque A est irréductible, quel est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = X$?

7°) On se propose ici de démontrer le **théorème de Birkhoff** (1946):
pour toute $A \in \Omega_n$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in (\Sigma_n)^p$ tels que :
$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_{\sigma_k} = A$.
(en d'autres termes, Ω_n est l'enveloppe convexe de $\{P_\sigma,\ \sigma \in \Sigma_n\}$.)

A cet effet, on va raisonner par récurrence (finie) sur le nombre $\pi(A)$ de termes strictement positifs dans A.

Montrer que : $\pi(A) \geqslant n$, et examiner le cas $\pi(A) = n$.

Supposons $\pi(A) > n$, et que la propriété voulue est vraie pour toute $B \in \Omega_n$ telle que $\pi(B) < \pi(A)$. D'après D.4, il existe $\sigma \in \Sigma_n$ telle que : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $a_{\sigma(j)j} > 0$. Puis il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{\sigma(k)k} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{\sigma(j)j}$; notons alors $a = a_{\sigma(k)k}$.

a) Montrer : $0 < a < 1$.

b) Soit $B = \dfrac{1}{1-a}\big(A - aP_\sigma\big)$.

i. Vérifier : $B \in \Omega_n$.

ii. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in (\Sigma_n)^p$ tels que :
$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_{\sigma_k} = B$.

c) Notons $\mu_{p+1} = a$, $\sigma_{p+1} = \sigma$, et, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\mu_k = (1-a)\lambda_k$.
Vérifier : $\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k P_{\sigma_k} = A$. Conclure.

PARTIE E : Une inégalité sur les permanents : théorème d'Aleksandrov

Soient $C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que , pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, les composantes de C_i soient toutes strictement positives, et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, quelconque.

On se propose de démontrer la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante par récurrence sur n:
si $\mathbf{per}(C_1, \dots, C_{n-1}, V) = 0$, alors $\mathbf{per}(C_1, \dots, C_{n-2}, V, V) \leqslant 0$ avec égalité si et seulement si $V = 0$.

1°) Traiter le cas $n = 2$.

Soit n un entier $\geqslant 3$. On suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.

2°) Soient $C_1, \dots, C_{n-2} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que , pour tout $i \in [\![1,n-2]\!]$, les composantes de C_i soient toutes strictement positives.

On note e_n le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que, si $\mathbf{per}(C_1, \dots, C_{n-2}, e_n, V) = 0$, alors on a : $\mathbf{per}(C_1, \dots, C_{n-2}, V, V) \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si V est proportionnel à e_n [on pourra développer $\mathbf{per}(C_1, \dots, C_{n-2}, e_n, V)$ par rapport à la $n-1$-ième colonne, puis $\mathbf{per}(C_1, \dots, C_{n-2}, V, V)$ par rapport à la dernière ligne].

3°) En appliquant le résultat précédent à $V + \lambda C_{n-1}$ pour λ convenable, montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

4°) Établir le **théorème d'Aleksandrov** (1938):
Soient $C_1,C_2,\dots,C_{n-1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que , pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, les composantes de C_i soient toutes strictement positives, et $C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, quelconque.
Alors on a l'inégalité :

$$\left[\mathbf{per}(C_1,\dots,C_{n-1},C_n)\right]^2 \geqslant \mathbf{per}(C_1,\dots,C_{n-2},C_{n-1},C_{n-1})\mathbf{per}(C_1,\dots,C_{n-2},C_n,C_n)$$

avec égalité si et seulement si C_{n-1} et C_n sont proportionnels [on interprétera cette inégalité comme la positivité du discriminant d'un trinôme bien choisi].

5°) Soit $A \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, l'inégalité :

$$\mathbf{per}(A)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{per}(A_{kj})\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{per}(A_{ki})\right)$$

PARTIE F : Théorème d'Egorychev

1°) (*Question à traiter par les 5/2. Les 3/2 admettront le résultat*)

a) Montrer que Ω_n est une partie convexe compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) En déduire que l'application $\begin{cases} \Omega_n & \to \mathbb{R} \\ A & \mapsto \mathbf{per}(A) \end{cases}$ admet sur Ω_n une borne inférieure > 0 et que cette borne inférieure est atteinte.

On appellera alors matrice minimale toute matrice $A \in \Omega_n$ en laquelle cette borne inférieure est atteinte.

2°) Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall \epsilon > 0 \text{ , } \mathbf{per}(A+\epsilon B) = \mathbf{per}(A) + \epsilon \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}\mathbf{per}(A_{ij}) + O(\epsilon^2) \text{ pour } \epsilon \to 0^+$$

Soit $A \in \Omega_n$; on appelle modification sur A toute matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik} = 0 \\ \forall j \in [\![1,n]\!], & \displaystyle\sum_{l=1}^{n} b_{lj} = 0 \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, & a_{ij} = 0 \Rightarrow b_{ij} \geqslant 0 \end{cases} .$$

3°) Soit $A \in \Omega_n$ et B une modification sur A.

a) Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall \epsilon \in]0,\eta[$, $A + \epsilon B \in \Omega_n$.

b) En déduire que, si A est minimale, alors : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}\mathbf{per}(A_{ij}) \geqslant 0$.

4°) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice minimale. On suppose ici A réductible; il existe donc une partition (S,T) de $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall (i,j) \in S \times T$, $a_{ij} = 0$ (S et T non vides)

D'après D.4 il existe $\sigma \in \Sigma_n$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i\sigma(i)} > 0$.
Choisissons $s \in S$ et $t \in T$, et soit $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$b_{s\sigma(s)} = b_{t\sigma(t)} = -1 \ , \ b_{s\sigma(t)} = b_{t\sigma(s)} = 1 \ , \ b_{ij} = 0 \text{ sinon}$$

a) Montrer que B est une modification sur A, et en déduire une contradiction (utiliser C.1)

b) En déduire que toute matrice minimale est irréductible.

c) En déduire, en utilisant le théorème de Frobenius et Kônig, que, si $A = (a_{ij})$ est minimale, alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathbf{per}(A_{ij}) > 0$.

5°) Si A est une matrice minimale, montrer que les matrices A^tA et ${}^tAA$ sont irréductibles (on pourra, en utilisant D.4 se ramener au cas où les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs).

6°) Soit A une matrice minimale. On se propose de démontrer dans cette question, qu'il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n$ tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ a_{ij}\mathbf{per}(A_{ij}) = a_{ij}(\lambda_i + \mu_j)$$

Dans toute la suite, A est fixée, et on note Z l'ensemble des couples (i,j) tels que $a_{ij} = 0$.

a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ p formes linéaires sur E, et ψ une autre forme linéaire sur E. on suppose que :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \supset \mathrm{Ker}(\psi)$$

Montrer alors que ψ est combinaison linéaire de $\varphi_1,\dots,\varphi_p$.

b) Montrer que l'application **per** est une application de classe $\mathcal{C}^1$, et en calculer la différentielle en A [on montrera que $d\mathbf{per}_A(M) = \sum_{i,j} \mathbf{per}(A_{ij})m_{ij}$].

c) Déduire des deux questions précédentes le résultat annoncé.

7°) A désigne toujours une matrice minimale. On note alors $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}$ et $e = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où les λ_i et les μ_j ont été définis dans la question précédente.

a) Établir : $\lambda + A\mu = \mu +^t A\lambda = \mathbf{per}(A)e$.

b) En déduire : $A^tA\lambda = \lambda$ et ${}^tAA\mu = \mu$.

c) Déduire de F.5 : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ et $\mu_1 = \cdots = \mu_n$.

d) Démontrer, pour $(i,j) \notin Z$: $\mathbf{per}(A) = \mathbf{per}(A_{ij})$.

8°) **a)** Soit A une matrice minimale; on suppose (ici seulement) a_{11}=0 et $a_{ii} > 0$ pour tout $i \in [\![2,n]\!]$. Montrer que la matrice $B = I_n - A$ est une modification sur A. En utilisant F.3.b, en déduire : $\mathbf{per}(A_{11}) > \mathbf{per}(A)$.

b) Soit A une matrice minimale. Établir l'inégalité : $\mathbf{per}(A_{ij}) \geqslant \mathbf{per}(A)$.

9°) Soit A un matrice minimale. Établir : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathbf{per}(A_{ij}) = \mathbf{per}(A)$ [on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser la question E.5]

10°) Soit A une matrice minimale. Soient s et t deux indices distincts dans $[\![1,n]\!]$, et C_s,C_t les colonnes d'indices s et t de A.

- **a)** Soit A' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant C_s par $\dfrac{C_s+C_t}{2}$. Montrer que $\mathbf{per}(A)=\mathbf{per}(A')$.

- **b)** Soit A'' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant C_s et C_t par $\dfrac{C_s+C_t}{2}$. Montrer que $\mathbf{per}(A)=\mathbf{per}(A'')$.

11°) Soit A une matrice minimale dont toutes les colonnes sont à coefficients strictement positifs, sauf peut-être la dernière. En développant son permanent selon la dernière colonne, et en utilisant E.4, démontrer que : $a_{ij}=\dfrac{1}{n}$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

12°) En utilisant la question F.10, établir le même résultat dans le cas où A est une matrice minimale quelconque.

♡ On a ainsi établi le **théorème d'Egorychev** (1980), résolvant la *conjecture de Van de Waerden* (1926) : Il existe une et une seule matrice de Ω_n qui réalise le minimum du permanent sur Ω_n: il s'agit de la matrice dont tous les termes sont égaux à $\dfrac{1}{n}$ (et son permanent est égal à $\dfrac{n!}{n^n}$).
