CORRIGÉ : IMAGES ET NOYAUX ITÉRÉS (d'après INA 1994 - 3h)

PARTIE A :

1. f est un automorphisme de E, donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f = E$, d'où : $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$ et $\boxed{p = 1 \text{ convient.}}$

2. a) • Soit u de coordonnées (x, y, z) dans la base (e_1, e_2, e_3).

$$u \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = 0 \iff \begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ -4x + y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}, \text{ soit } u \text{ de coordonnées } (-z, z, z).$$

$\boxed{\text{Le noyau de } f \text{ est donc la droite vectorielle de base } -e_1 + e_2 + e_3.}$

• Le théorème du rang assure alors que $\dim \operatorname{Im} f = 2$. On sait de plus que $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dont les coordonnées sont les colonnes de la matrice. C'est donc le plan engendré (par exemple) par $f(e_1)$ de coordonnées $(4, -2, -4)$ et $f(e_2)$ de coordonnées $(-1, -1, 1)$ puisque ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. C'est donc aussi le plan d'équation $x + z = 0$ (en effet, les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ vérifient cette équation, donc $\operatorname{Im} f$ est inclus dans le plan d'équation $x + z = 0$, d'où l'égalité par égalité des dimensions).

$$\boxed{\operatorname{Im} f \text{ est le plan d'équation } x + z = 0.}$$

• On remarque que le vecteur de coordonnées $(-1, 1, 1)$ vérifie cette équation, donc appartient à $\operatorname{Im} f$ (on pouvait aussi remarquer qu'il est égal à $-\frac{1}{3}\big(f(e_1) + f(e_2)\big)$).

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f, \text{ et } p = 1 \text{ ne saurait convenir.}}$

b) On peut calculer la matrice de f^2 : on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, ce qui permet d'obtenir facilement (mêmes méthodes qu'avant, je ne détaille pas les calculs) que :

$$\boxed{\operatorname{Im} f^2 \text{ est la droite vectorielle de base le vecteur de coordonnées } (-1, -1, 1)}$$

et que :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ est le plan d'équation } x - y + 2z = 0.}$$

La droite $\operatorname{Im} f^2$ n'étant pas incluse dans le plan $\operatorname{Ker} f^2$ (car le vecteur $(-1, -1, 1)$ ne vérifie pas l'équation du plan), les deux sous-espaces sont en somme directe et on déduit alors du théorème du rang que $\boxed{E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2}$ (cf. aussi le cours sur les hyperplans).

3. a) • Un vecteur u de coordonnées (x, y, z, t) dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) appartient au noyau de f si et seulement si :

$$\begin{cases} -y = 0 \\ my = 0 \\ x - mz - t = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à : } \begin{cases} y = 0 \\ x = mz + t \end{cases}.$$

$\operatorname{Ker} f$ est donc l'intersection de deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^4$; c'est donc un plan (cf. cours). Une base en est formée, par exemple, des vecteurs de coordonnées $(1, 0, 0, 1)$ et $(m, 0, 1, 0)$ (il suffit de choisir deux vecteurs linéairement indépendants qui vérifient le système précédent).

Le théorème du rang permet alors d'affirmer que f est de rang 2. $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ donc aussi par $f(e_1)$ de coordonnées $(0, 0, 1, 0)$ et $f(e_2)$ de coordonnées $(-1, m, 0, 1)$ qui sont linéairement indépendants.

• D'après le théorème sur les bases adaptées à une décomposition en somme directe, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si la réunion d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$ est une base de E, c'est-à-dire si la matrice formée des coordonnées des 4 vecteurs précédents est de rang 4.

Cette matrice est $\begin{pmatrix} 1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est alors facile de vérifier, par exemple par la méthode du pivot (ou le calcul de son déterminant, qui vaut m^2) qu'elle est bien de rang 4 si et seulement si $m \neq 0$.

- En conclusion, $\boxed{\text{on peut choisir } p = 1 \text{ si et seulement si } m \neq 0.}$

b) • Lorsque $m \neq 0$, d'après ce qui précède $p = 1$ convient, et c'est clairement le plus petit entier possible.

- Lorsque $m = 0$, $p = 1$ ne convient pas, et la matrice de f^2 dans la base $\mathscr{B}$ est $A_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  d'où clairement $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}\big(\{e_1, e_3, e_4\}\big)$ et $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(e_3)$, donc $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^2$, et on n'a pas $\operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2 = E$.

  Puis $A_0^3 = 0$, d'où $f^3 = 0$ et donc $\operatorname{Ker} f^3 = E$ et $\operatorname{Im} f^3 = \{0\}$: on a ainsi $\operatorname{Ker} f^3 \oplus \operatorname{Im} f^3 = E$, et finalement $\boxed{p = 3 \text{ si } m = 0}$.

4. a) • Soit $x \in \operatorname{Ker} f^k$, alors $f^{k+1}(x) = f\big(f^k(x)\big) = f(0) = 0$, d'où $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\boxed{\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}.}$

- Soit $x \in \operatorname{Im} f^{k+1}$, alors $\exists y \in E$ tel que $x = f^{k+1}(y) = f^k\big(f(y)\big)$ d'où $x \in \operatorname{Im} f^k$ et $\boxed{\operatorname{Im} f^k \supset \operatorname{Im} f^{k+1}.}$

b) D'après la question précédente, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$, d'où $\dim \operatorname{Ker} f^k \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (a_k) \text{ est croissante.}}$

c) Si la suite (a_k) était strictement croissante, comme il s'agit d'une suite d'**entiers**, on aurait $a_{k+1} \geqslant a_k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où facilement par récurrence $a_k \geqslant k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; or, E étant de dimension finie n, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \leqslant n$: contradiction.

Il existe donc un entier k tel que $a_k = a_{k+1}$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{l'ensemble } F \text{ est non vide.}}$

d) On pose p le plus petit élément de F : son existence est assurée car F est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Par définition de p :

- puisque p appartient à F on a $a_p = a_{p+1}$ donc $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ (inclusion + égalité des dimensions) ;
- pour $k \leqslant p - 1$, on a $k \notin F$ donc $a_k \neq a_{k+1}$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^k < \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et l'inclusion entre $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Ker} f^{k+1}$ est stricte.

On a donc bien les $\boxed{\text{propriétés (i) et (ii).}}$

e) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant p$, et soit $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
Alors $f^{k+1}(x) = 0 = f^{p+1}\big(f^{k-p}(x)\big)$, d'où $f^{k-p}(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
On a donc $f^{k-p}(x) \in \operatorname{Ker} f^p$, d'où $f^p\big(f^{k-p}(x)\big) = 0 = f^k(x)$ et $x \in \operatorname{Ker} f^k$.

Nous avons donc prouvé : $\operatorname{Ker} f^{k+1} \subset \operatorname{Ker} f^k$, et d'après la question **4.a** : $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$.

On aura donc bien : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant p \Longrightarrow \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p.}$

Autrement dit, dans un espace vectoriel de dimension finie, la suite des noyaux itérés d'un endomorphisme est stationnaire. Ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie, comme le prouve l'exemple de l'endomorphisme $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{R}[X]$.

f) • Soit $x \in \operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p$.
Alors $\exists y \in E$ tel que $x = f^p(y)$, et $f^p(x) = 0$, d'où $f^{2p}(y) = 0$, et $y \in \operatorname{Ker} f^{2p}$.
D'après **4.e**, on a $\operatorname{Ker} f^{2p} = \operatorname{Ker} f^p$, d'où $y \in \operatorname{Ker} f^p$ et $x = f^p(y) = 0$: la somme $\operatorname{Ker} f^p + \operatorname{Im} f^p$ est donc directe.

- On a de plus d'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f^p + \dim \operatorname{Im} f^p = \dim E$, et donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p = E.}$$

PARTIE B :

1. a) Compte tenu de l'hypothèse $p = n$, on a, en reprenant les notations et résultats de **A.4.d**, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant n$.
Les a_i étant **entiers**, ceci implique clairement : $\forall i \in [\![0\,;n]\!]$, $a_i = i$, et donc $\dim \operatorname{Ker} f^i = i$; en particulier, $\dim \operatorname{Ker} f^n = n$ d'où $\operatorname{Ker} f^n = E$ et $\boxed{f^n = 0.}$

D'après ce qui précède, on a aussi $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1.}$

b) • On cherche ε_1 tel que $f(\varepsilon_1) = 0$; soient (x, y, z) les coordonnées de ε_1 dans la base (e_1, e_2, e_3).
On a alors :

$$f(\varepsilon_1) = 0 \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

On choisit alors ε_1 de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).
• On cherche maintenant ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$; soient (x, y, z) les coordonnées de ε_2 dans la base (e_1, e_2, e_3).
On a alors :

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \iff \begin{cases} x - z = 1 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 1 \\ 0 = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1\,. \end{cases}$$

On choisit alors (par exemple) ε_2 de coordonnées $(1, -1, 0)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).
• On cherche enfin ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$; soient (x, y, z) les coordonnées de ε_3 dans la base (e_1, e_2, e_3).
On a alors :

$$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 \iff \begin{cases} x - z = 1 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 1 \\ 0 = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z\,. \end{cases}$$

On choisit alors (par exemple) ε_3 de coordonnées $(1, 0, 0)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).
• Le déterminant de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$\det_{\mathscr{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

donc $\boxed{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de } E \text{, vérifiant les conditions requises.}}$

• Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, vu les conditions fixées, on aura la matrice B de f : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(rappelons que, par définition, cette matrice exprime les coordonnées des $f(\varepsilon_j)$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$).

• On a de façon claire : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$, d'où en observant les matrices B et B^2 :
$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1\}$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1\}$.
On n'a donc pas $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$, et pas non plus $\operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2 = E$; par contre, $f^3 = 0$ d'où $\operatorname{Ker} f^3 \oplus \operatorname{Im} f^3 = E$, et on conclut : $\boxed{p = 3.}$

2. a) Soit $k \in [\![0\,; p-1]\!]$. Alors d'après **A.4.a**, $\operatorname{Ker} f^k$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker} f^{k+1}$, et d'après **A.4.d**, $\operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{k+1}$, et donc (cf. théorème du cours, existence de supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension finie) :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^k \text{ admet un supplémentaire } S_k \text{ dans } \operatorname{Ker} f^{k+1}\text{, avec } S_k \neq \{0\}.}$$

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on a d'après ce qui précède :
$\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k-1} \oplus S_{k-1}$, d'où $\operatorname{Ker} f^k = \left(\operatorname{Ker} f^{k-2} \oplus S_{k-2}\right) \oplus S_{k-1}$, et par récurrence immédiate :

$$\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_{k-1}.$$

Puisque $\operatorname{Ker} f^p = E$, on a également $E = \operatorname{Ker} f \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_{p-1}$.

Choisissons alors une base de E adaptée à cette somme directe, et notons A la matrice de f dans cette base. Considérons un vecteur e faisant partie de cette base, il est dans $\operatorname{Ker} f$ ou dans l'un des S_k, $1 \leqslant k \leqslant p-1$:

- Si $e \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(e) = 0$ et la colonne représentant $f(e)$ dans la matrice A a tous ses coefficients nuls.
- Si $e \in S_k$ avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $e \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$, soit $f^{k+1}(e) = 0$ donc $f(e) \in \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_{k-1}$, donc la colonne représentant $f(e)$ dans la matrice A a tous ses coefficients nuls à partir de l'indice du dernier vecteur de la base de S_{k-1}.

A est donc par blocs : $\begin{bmatrix} 0 & & ? \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls.

On a ainsi démontré un résultat mentionné dans le cours, chapitre n°4 : toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

c) On a $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie : $\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_4 \\ f(e_3) = 0 \\ f(e_4) = -e_3 \end{cases}$.

Si l'on pose alors alors $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 \\ \varepsilon_3 = e_4 \\ \varepsilon_4 = e_2 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = 0 \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_4) = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$, et la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui a bien la forme cherchée.

PARTIE C :

1.
- Si 0 n'était pas valeur propre de f, alors f serait injective, donc bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).
Par suite, en composant à gauche l'équation $f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = 0$ par $(f^{-1})^{n-1}$, on en déduirait $f - a\mathrm{Id}_E = 0$, ce qui est contradictoire avec les hypothèses.
$$\boxed{0 \text{ est donc valeur propre de } f.}$$
- De même, si a n'était pas valeur propre de f, alors $f - a\mathrm{Id}_E$ serait bijective, et en composant à droite la même équation par $(f - a\mathrm{Id}_E)^{-1}$ on en déduirait $f^{n-1} = 0$, ce qui est contradictoire.
$$\boxed{a \text{ est donc valeur propre de } f.}$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
Alors $f(x) = \lambda x$, d'où $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$ et par récurrence immédiate $f^{n-1}(x) = \lambda^{n-1} x$.
Par suite, $0 = f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}_E)(x) = f^{n-1}(\lambda x - ax) = (\lambda - a)\lambda^{n-1} x$, et comme $x \neq 0$, $(\lambda - a)\lambda^{n-1} = 0$, donc $\lambda \in \{0, a\}$.
$$\boxed{\text{Les seules valeurs propres de } f \text{ sont } 0 \text{ et } a.}$$

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$, et $x \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$.
Alors $f^k(x) = 0$ et $(f - a\mathrm{Id}_E)(x) = 0$, d'où $f(x) = ax$, et par récurrence immédiate $f^k(x) = a^k x = 0$, d'où comme $a \neq 0$: $x = 0$, et $\boxed{\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) = \{0\}.}$

b) On a $f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = 0$, d'où $\mathrm{Im}(f - a\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$, et donc $\dim \mathrm{Im}(f - a\mathrm{Id}_E) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$. D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Im}(f - a\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) = n$, donc en reportant dans l'inégalité précédente : $\dim \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1} \geqslant n$.

Mais la somme $\mathrm{Ker}\, f^{n-1} + \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$ étant directe d'après **C.2.a**, sa dimension est égale à $\dim \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$, et est donc inférieure ou égale à n.

Ainsi $\dim \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1} = n$ et $\boxed{\mathrm{Ker}\, f^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) = E.}$

3. a) Si $p < n-1$, alors par définition de p on a $\mathrm{Ker}\, f^{n-1} = \mathrm{Ker}\, f^p$, d'où d'après **C.2.b** :$\mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) = E$.
Soit $x \in E$. On le décompose dans la somme directe précédente :

$$\exists\, (x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, f^p \times \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) \text{ tels que } x = x_1 + x_2.$$

Ainsi $f^p \circ (f - a\mathrm{Id}_E)(x) = f^p \circ (f - a\mathrm{Id}_E)(x_1 + x_2) = f^p \circ (f - a\mathrm{Id}_E)(x_1)$, et f^p et $f - a\mathrm{Id}_E$ commutent, d'où $f^p \circ (f - a\mathrm{Id}_E)(x) = (f - a\mathrm{Id}_E) \circ f^p(x_1) = 0$.

Ainsi, $f^p \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = 0$, ce qui contredit la dernière hypothèse de (2).

b) Par définition, on a $p \leqslant n$, et pour prouver $p = n-1$ il suffit d'après la question précédente de prouver que $p = n$ est impossible.
Si on avait $p = n$, alors, d'après **B.1**, on aurait $f^n = 0$. Mais $f^{n-1} \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = 0$, d'où $f^n = af^{n-1}$ d'où $f^{n-1} = 0$ puisque a non nul, ce qui est exclu.
On a donc bien : $\boxed{p = n-1.}$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆