CORRIGÉ DU DS°1

EXERCICE 1 :

1. • Un polynôme P appartient à F si et seulement si il est divisible par $X(X-1)(X-2)$; puisque l'on ne considère ici que des polynômes de degré $\leqslant 3$, F est exactement l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda.X(X-1)(X-2)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $X(X-1)(X-2)$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E, et sa dimension est 1.

De même G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

• *On pouvait bien sûr démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant la caractérisation habituelle :*

– *F est bien inclus dans E, par définition ;*

– *Le polynôme nul appartient à F puisqu'il s'annule en $0,1,2$, donc F est non vide ;*

– *Si P,Q sont dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\forall\, i \in \{0,1,2\},\ (\lambda P+Q)(i) = \lambda P(i) + Q(i) = \lambda.0 + 0 = 0\,,$$

donc $\lambda P + Q \in F$.

Mais il fallait de toutes façons faire ce qui précède pour trouver la dimension...

• *On pouvait aussi remarquer que F est l'intersection des noyaux des trois formes linéaires $\varphi_i : P \mapsto P(i)$ pour $i \in \{0,1,2\}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de E, puis vérifier que ces trois formes linéaires sont indépendantes, ce qui donne* $\dim F = \dim \mathbb{R}_3[X] - 3 = 1$.

2. • Soit $P \in F \cap G$; alors $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$; P possède donc 4 racines distinctes ; étant de degré $\leqslant 3$, c'est le polynôme nul.

Donc $F \cap G = \{0\}$, ce qui signifie que la somme $F+G$ est directe.

• H est l'ensemble des polynômes qui admettent 1 et 2 comme racines, et de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $(aX+b)(X-1)(X-2)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Or $(aX+b)(X-1)(X-2) = aX(X-1)(X-2) + b(X-1)(X-2)$, H est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des deux polynômes $X(X-1)(X-2)$ et $(X-1)(X-2)$. Cela prouve que H est un sous-espace vectoriel de E et, ces deux polynômes formant un système libre (car de degrés distincts), H est un plan.

Il est clair que $F \subset H$ et $G \subset H$ donc $F \oplus G \subset H$ puisque H est un sous-espace vectoriel de E. Puisque $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 2 = \dim H$, on en déduit l'égalité demandée (*on pouvait aussi démontrer une double inclusion*).

3. • K est l'ensemble des polynômes pairs de degré $\leqslant 3$, donc de la forme $a + bX^2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; il s'agit donc du plan vectoriel engendré par les polynômes 1 et X^2.

• Soit $P \in H \cap K$; alors il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX^2$ et $P(1) = P(2) = 0$, ce qui implique $a + b = a + 4b = 0$ d'où $a = b = 0$ et finalement $P = 0$.

Donc $H \cap K = \{0\}$, la somme $H + K$ est directe ; puisque $\dim H + \dim K = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, on a bien d'après un théorème du cours : $\mathbb{R}_3[X] = H \oplus K = F \oplus G \oplus K$.

EXERCICE 2 :

1. a) Montrons que $V(f) = \mathrm{Vect}(f) = \{\lambda f,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

– Puisque $f \in V(f)$ (car $f = \varphi_0(f)$), et que $V(f)$ est un espace vectoriel , on a $\mathrm{Vect}(f) \subset V(f)$.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(f)(x) = \mathrm{e}^{x+t} = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^t f(x)$ donc $\varphi_t(f) = \mathrm{e}^t f \in \mathrm{Vect}(f)$. On en déduit l'inclusion $V(f) \subset \mathrm{Vect}(f)$.

En conclusion, dans le cas $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $V(f)$ est la droite vectorielle de base f.

b) Montrons que $V(f) = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.

– La fonction sin appartient à $V(f)$ puisque $\sin = \varphi_0(f)$, et la fonction cos appartient aussi à $V(f)$ puisque $\cos = \varphi_{\frac{\pi}{2}}(f)$ $\left(\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(\sin, \cos) \subset V(f)$.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(f)(x) = \sin(x+t) = \sin x \cos t + \sin t \cos x$ donc
$\varphi_t(f) = (\cos t)\sin + (\sin t)\cos \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. On en déduit l'inclusion $V(f) \subset \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.

En conclusion, dans le cas $f : x \mapsto \sin x$, $V(f)$ est le plan vectoriel engendré par les deux fonctions sin et cos.

c) Montrons que $V(f) = \mathbb{R}_2[x]$ (espace vectoriel des fonctions trinômes).

– Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 = \dfrac{1}{2}\left((x+1)^2 + (x-1)^2 - 2x^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\varphi_1(f) + \varphi_{-1}(f) - 2\varphi_0(f)\right)(x)$, la fonction constante égale à 1 est combinaison linéaire de φ_{-1}, φ_1 et φ_0 donc appartient à $V(f)$.

En écrivant $x = \dfrac{1}{4}\left((x+1)^2 - (x-1)^2\right)$, on obtient de même que la fonction $x \mapsto x$ appartient à $V(f)$.

Enfin il en est de même de la fonction $x \mapsto x^2$ puisque c'est $\varphi_0(f)$.

Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, engendré par ces 3 fonctions, est donc aussi inclus dans $V(f)$.

– L'égalité : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ (x+t)^2 = x^2 + (2t)x + t^2$ montre que chaque fonction $\varphi_t(f)$ appartient à $\mathbb{R}_2[x]$, donc on a $V(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$.

En conclusion, dans le cas $f : x \mapsto x^2$, $V(f)$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, et est donc de dimension 3.

2. a) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{t_k}(f) = 0_E \quad \text{soit :} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{(x+t_k)^2} = 0\,.$$

Montrons par l'absurde que tous les λ_i sont nuls. Si il existe un i tel que $\lambda_i \neq 0$, posons $p = \max\{i \in [\![1\,;n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$ de sorte que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathrm{e}^{(x+t_k)^2} = 0\,.$$

En divisant cette relation par $\mathrm{e}^{(x+t_p)^2}$ (non nul !) on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \mathrm{e}^{(t_1-t_p)x+(t_1^2-t_p^2)} + \cdots + \lambda_{p-1} \mathrm{e}^{(t_{p-1}-t_p)x+(t_{p-1}^2-t_p^2)} + \lambda_p = 0\,,$$

puis en passant à la limite quand $x \to +\infty$, puisque $t_i - t_p < 0$ pour $i \in [\![1\,;p-1]\!]$ on obtient $\lambda_p = 0$ ce qui est contradictoire.

On a ainsi prouvé par l'absurde que la famille donnée est libre.

b) Si $V(f)$ était de dimension finie N, toute famille libre de $V(f)$ aurait moins de N éléments. Or on vient de voir que l'on peut trouver dans $V(f)$ des familles libres de cardinal quelconque, ce qui est contradictoire.

On a donc prouvé par l'absurde que $V(f)$ n'est pas de dimension finie dans le cas $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

EXERCICE 3 :

1. • La linéarité de φ se vérifie facilement :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ \varphi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P + Q)' - nX(\lambda P + Q)\\ &= \lambda\big[(X^2-1)P' - nXP\big] + \big[(X^2-1)Q' - nXQ\big] = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut écrire : $P = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où

$$\varphi(P) = a_n\big[(X^2-1)nX^{n-1} - nX^{n+1}\big] + (X^2-1)Q' - nXQ = -na_nX^{n-1} + \underbrace{(X^2-1)Q' - nXQ}_{\text{degré } \leqslant n}$$

est de degré $\leqslant n$, c'est-à-dire $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, φ est bien un *endo*morphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. • – Les polynômes P_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$ sont $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$; pour prouver qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit donc de prouver qu'ils forment une famille libre.

Pour cela, procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

– Pour $n = 1$, la famille est formée des deux polynômes $\{X-1, X+1\}$ dans $\mathbb{R}_1[X]$. Cette famille est libre puisque la relation $\lambda_0(X-1) + \lambda_1(X+1) = 0$ implique $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ (en faisant $X = 1$ puis $X = -1$).

– Supposons donc la propriété démontrée à l'ordre $n-1$ $(n \geqslant 2)$, c'est-à-dire que la famille des polynômes $\big((X+1)^i(X-1)^{n-1-i}\big)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est libre.

Soient alors $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $n+1$ réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_i = 0$. Cela s'écrit aussi :

$$\lambda_0(X-1)^n + \lambda_1(X+1)(X-1)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(X+1)^{n-1}(X-1) + \lambda_n(X+1)^n = 0 \quad (*)$$

Pour $X = 1$ on obtient $\lambda_n 2^n = 0$ d'où $\lambda_n = 0$. La relation $(*)$ devient donc :

$$(X-1)\big[\lambda_0(X-1)^{n-1} + \lambda_1(X+1)(X-1)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(X+1)^{n-2}(X-1) + \lambda_{n-1}(X+1)^{n-1}\big] = 0$$

et l'anneau $\mathbb{R}[X]$ étant intègre on en déduit :

$$\lambda_0(X-1)^{n-1} + \lambda_1(X+1)(X-1)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(X+1)^{n-2}(X-1) + \lambda_{n-1}(X+1)^{n-1} = 0\,.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, cela implique $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

On a donc démontré que la famille des polynômes $\big((X+1)^i(X-1)^{n-i}\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre, c'est-à-dire la propriété à l'ordre n. Cela achève la récurrence, et démontre la propriété demandée.

- Pour $i \in [\![0\,;n]\!]$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(P_i) &= (X-1)(X+1)\big[i(X+1)^{i-1}(X-1)^{n-i} + (n-i)(X+1)^i(X-1)^{n-i-1}\big] - nXP_i\\ &= i(X-1)P_i + (n-i)(X+1)P_i - nXp_i = (n-2i)P_i\,.\end{aligned}$$

3. D'après le cours, puisque $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on sait que $\operatorname{Im}\varphi$ est le sous-espace vectoriel engendré par les polynômes $\varphi(P_i)$. Deux cas se présentent :

– n impair : dans ce cas, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $n-2i$ n'est pas nul, donc la famille $\big(\varphi(P_i)\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est encore une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans ce cas, φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque transforme une base en une base).

– n pair : dans ce cas, $\operatorname{Im}\varphi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par les n polynômes P_i pour $i \in [\![0\,;n]\!] \setminus \left\{\dfrac{n}{2}\right\}$. Ce sous-espace est de dimension n (puisque la famille (P_i) est libre) ; d'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker}\varphi$ est donc de dimension 1, et, puisque $\varphi\big(P_{n/2}\big) = 0$, $\operatorname{Ker}\varphi$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P_{n/2} = (X^2-1)^{n/2}$.

EXERCICE 4 :

1. Un résultat préliminaire

- Déjà, les deux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe : en effet, si $x \in \operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E)\cap\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E)$, alors $(u-a\mathrm{Id}_E)(x) = (u-b\mathrm{Id}_E)(x) = 0$ soit $u(x) = ax$ et $u(x) = bx$. Puisque $a \neq b$, l'égalité $ax = bx$ implique $x = 0$, donc $\operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E)\cap\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
- On remarque que $u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E = (u-b\mathrm{Id}_E)\circ(u-a\mathrm{Id}_E)$ donc $\operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E)$; de même, l'égalité $u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E = (u-a\mathrm{Id}_E)\circ(u-b\mathrm{Id}_E)$ implique $\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E)$.

  On en déduit : $\operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E)$.
- Démontrons l'inclusion réciproque, et soit $x \in \operatorname{Ker}(u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E)$. On « remarque » que x peut s'écrire

$$x = \frac{1}{a-b}\big[(u-b\mathrm{Id}_E)(x) - (u-a\mathrm{Id}_E)(x)\big]$$

  Posons $x_1 = \dfrac{1}{a-b}(u-b\mathrm{Id}_E)(x)$ et $x_2 = -\dfrac{1}{a-b}(u-a\mathrm{Id}_E)(x)$, de sorte que $x = x_1 + x_2$. On a alors

$$(u-a\mathrm{Id}_E)(x_1) = \frac{1}{a-b}(u-a\mathrm{Id}_E)\circ(u-b\mathrm{Id}_E)(x) = \frac{1}{a-b}\big(u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E\big)(x) = 0$$

  compte tenu de l'hypothèse faite sur x, donc x_1 appartient à $\operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E)$ et on démontre de la même façon que x_2 appartient à $\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E)$.

  Cela prouve que $\operatorname{Ker}(u^2-(a+b)u+ab\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u-a\mathrm{Id}_E)+\operatorname{Ker}(u-b\mathrm{Id}_E)$, et achève la démonstration.

2. On calcule :

$$f^2-(a+b)f+ab\mathrm{Id}_E = a^2p + b^2q - (a+b)(ap+bq) + ab\mathrm{Id}_E = ab(p+q) - ab\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

donc $\operatorname{Ker}\big(f^2-(a+b)f+ab\mathrm{Id}_E\big) = E$ et le résultat demandé découle directement de la question préliminaire.

3. a) On a le système : $\begin{cases} p+q=\mathrm{Id}_E & (1) \\ ap+bq=f & (2) \end{cases}$. En faisant $(2)-b(1)$ on trouve $p=\dfrac{1}{a-b}(f-b\mathrm{Id}_E)$ et en faisant $(2)-a(1)$ on trouve $q=\dfrac{1}{b-a}(f-a\mathrm{Id}_E)$.

On en déduit :

$$q\circ p=-\frac{1}{(b-a)^2}(f-a\mathrm{Id}_E)\circ(f-b\mathrm{Id}_E)=0_{\mathscr{L}(E)}$$

d'après un calcul déjà fait, et puisque $f-a\mathrm{Id}_E$ et $f-b\mathrm{Id}_E$ commutent, on a aussi $p\circ q=0$.

b) En reprenant l'exprtession trouvée ci-dessus :

$$\begin{aligned} p^2&=\frac{1}{(a-b)^2}(f-b\mathrm{Id}_E)^2=\frac{1}{(a-b)^2}(f^2-2bf+b^2\mathrm{Id}_E)\\ &=\frac{1}{(a-b)^2}(a^2p+b^2q-2b(ap+bq)+b^2\mathrm{Id}_E)\\ &=\frac{1}{(a-b)^2}(a^2p+b^2(\mathrm{Id}_E-p)-2b(ap+b(\mathrm{Id}_E-p))+b^2\mathrm{Id}_E)=\frac{1}{(a-b)^2}((a-b)^2p)=p \end{aligned}$$

donc p est un projecteur, et il en est de même de q.

Ces projecteurs sont non nuls puisque f n'est pas une homothétie (donc $f\neq a\mathrm{Id}_E$ et $f\neq b\mathrm{Id}_E$).

c) Puisque p et q sont deux projecteurs associés, $\mathrm{Ker}\,p=\mathrm{Im}\,q$ et $\mathrm{Ker}\,q=\mathrm{Im}\,p$.

Puisque $p=\dfrac{1}{a-b}(f-b\mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Ker}\,p=\mathrm{Ker}(f-a\mathrm{Id}_E)$ et de même $\mathrm{Ker}\,q=\mathrm{Ker}(f-b\mathrm{Id}_E)$.

4. D'après un calcul déjà fait :

$$f^2-(a+b)f+ab\mathrm{Id}_E=0$$

donc puisque $ab\neq 0$ on a

$$\mathrm{Id}_E=-\frac{1}{ab}\left(f^2-(a+b)f\right)=-\frac{1}{ab}\left(f-(a+b)\mathrm{Id}_E\right)\circ f$$

ce qui s'écrit $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ avec $g=-\dfrac{1}{ab}\left(f-(a+b)\mathrm{Id}_E\right)$. Il est clair que g commute avec f donc on a aussi $f\circ g=\mathrm{Id}_E$, ce qui prouve que f est inversible et que :

$$f^{-1}=g=-\frac{1}{ab}\left(f-(a+b)\mathrm{Id}_E\right)=-\frac{1}{ab}\left(ap+bq-(a+b)\mathrm{Id}_E\right)=\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q\,.$$

5.
- La propriété $f^n=a^np+b^nq$ peut se démontrer par récurrence sur n, ou, mieux, à l'aide de la formule du binôme.

  En effet, puisque p et q commutent, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

  $$f^n=(ap+bq)^n=a^np^n+b^nq^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\,.$$

  Or pour $n\in\mathbb{N}^*$, $p^n=p$ et $q^n=q$ car ce sont des projecteurs et pour $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $p^kq^{n-k}=0$ (car $pq=0$), ce qui donne le résultat demandé pour $n\in\mathbb{N}^*$. Ce résultat demeure vrai pour $n=0$ puisque $p+q=\mathrm{Id}_E$.
- Puisque $f^{-1}=a^{-1}p+b^{-1}q$, le même calcul donne, pour $n\in\mathbb{N}^*$: $f^{-n}=a^{-n}p+b^{-n}q$, donc la formule reste vraie pour n entier négatif.

6. a) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$h^2(x,y)=h(x+y,x+y)=(x+y+x+y,x+y+x+y)=2(x+y,x+y)=2h(x,y)$$

et par le même principe on démontre la relation demandée par récurrence sur k.

b) On remarque que $f=\mathrm{Id}_E+h$ donc en utilisant la formule du binôme (Id_E et h commutent !), on a pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f^n&=(\mathrm{Id}_E+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k=\mathrm{Id}_E+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\\ &=\mathrm{Id}_E+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}\right)h=\mathrm{Id}_E+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k-1\right)h=\mathrm{Id}_E+\frac{3^n-1}{2}h\,, \end{aligned}$$

cette dernière formule restant vraie pour $n=0$.

c) D'après la question précédente, $f^2 = \mathrm{Id}_E + 4h = \mathrm{Id}_E + 4(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$, c'est-à-dire $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On a donc $a = 1$ et $b = 3$.

d) En s'inspirant des calculs faits à la question **3.a)**, posons :$p = \dfrac{1}{a-b}(f - b\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E - \dfrac{h}{2}$ et $q = \dfrac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E) = \dfrac{h}{2}$.
Les relations $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$ et $f^n = a^n p + b^n q$ sont alors immédiates compte tenu des calculs précédents.

EXERCICE 5 :

1. a) Puisque $\deg(A) = n$ et $\deg(P) \leqslant m$, il est clair que $\deg f(P) = \deg(AP' - PA') \leqslant n + m - 1$.
Ainsi : $p = n + m - 1$.

b) D'après ce qui précède, f est bien une application de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$. Sa linéarité découle immédiatement de la linéarité de la dérivation.

c) Calcul immédiat : $f(QA) = Q'A^2$.

d) Sur I, intervalle où A ne s'annule pas, on a, pour $P \in \mathbb{R}_m[X]$:

$$\left(\frac{P}{A}\right)' = \frac{P'A - PA'}{A^2} = \frac{f(P)}{A^2}$$

donc $f(P) = 0 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{P}{A}\right)' = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{P}{A} = cste$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ de la forme λA avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $A \in \mathbb{R}_m[X]$ par hypothèse, $\mathrm{Ker}\, f$ est exactement la droite vectorielle engendrée par A.

On déduit alors du théorème du rang : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_m[X] - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = (m+1) - 1 = m$.

2. *Nous allons ici traiter les deux questions en même temps.*

Puisque $(X^i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, la famille $\big(f(X^i)\big)_{0 \leqslant i \leqslant m} = (Y_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ d'après un résultat du cours.

Or $f(A) = 0$, soit $f\big(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0\big) = 0$ soit, par linéarité de f :

$$Y_n = f(X^n) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f(X^k) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k Y_k\,.$$

Ainsi Y_n est combinaison linéaire de la famille $(Y_i)_{i \in [\![0;m]\!] \setminus \{n\}}$, donc d'après un résultat du cours, la famille $(Y_i)_{i \in [\![0;m]\!] \setminus \{n\}}$ est encore génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

Enfin, puisque cette famille comporte m éléments et que $\dim(\mathrm{Im}\, f) = m$ d'après la question précédente, c'en est une base.

3. a) Un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ divisible par A^2 s'écrit sous la forme UA^2 avec $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(UA^2) \leqslant p = n + m - 1$ donc $\deg U \leqslant p - 2n = m - n - 1$ ($m - n - 1 > \frac{m}{2} - 1 > 0$ compte tenu des hypothèses).

On peut alors trouver un polynôme Q tel que $Q' = U$; on aura $\deg Q = \deg U + 1 \leqslant m - n$, donc $\deg(QA) \leqslant (m-n) + n = m$ et $QA \in \mathbb{R}_m[X]$.

D'après la question 1.c, on a $f(QA) = Q'A^2 = UA^2$ donc UA^2 appartient bien à $\mathrm{Im}\, f$.

b)
- Soit $S \in \mathbb{R}_p[X]$. La division euclidienne de S par A^2 s'écrit : $S = UA^2 + R$ avec $\deg(R) < \deg(A^2) = 2n$. Puisque $2n - 1 \leqslant p = n + m - 1$, on a $R \in \mathbb{R}_p[X]$ donc aussi $UA^2 \in \mathbb{R}_p[X]$. D'après la question précédente, UA^2 appartient à $\mathrm{Im}\, f$ donc, puisque $\mathrm{Im}\, f$ est un espace vectoriel, on aura bien : $S \in \mathrm{Im}\, f \Longleftrightarrow R \in \mathrm{Im}\, f$.
- Pour tout $i \in [\![0\,;m]\!]$,

$$\begin{aligned} Y_i = f(X^i) &= \big(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0\big)(iX^{i-1}) - \big(nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1\big)X^i \\ &= (i-n)X^{n+i-1} + [i - (n-1)]a_{n-1}X^{n+i-2} + \cdots \end{aligned}$$

donc si $i \neq n$, $\deg(Y_i) = n + i - 1$.
Ainsi, $\deg(Y_0) = n - 1, \ldots, \deg(Y_{n-1}) = 2n - 2, \deg(Y_{n+1}) = 2n, \deg(Y_{n+2}) = 2n + 1$ etc. Puisque $R \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(\{Y_0, \ldots, Y_{n-1}, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots, Y_m\})$ et que $\deg(R) \leqslant 2n - 1$ par définition de la division euclidienne, on a nécessairement $R \in \mathrm{Vect}(\{Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\})$.

4. a) Puisque $\dfrac{S}{A^2} = \dfrac{f(P)}{A^2} = \left(\dfrac{P}{A}\right)'$, l'ensemble des primitives sur I de $\dfrac{S}{A^2}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $\dfrac{P}{A} + cste$.

b) En particulier, puisque $Y_i = f(X^i)$, $\displaystyle\int \frac{Y_i(x)}{A^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^i}{A(x)} + cste$.

5. Application numérique ennuyeuse, à finir...

EXERCICE 6 :

1. a) $\varphi \circ \varphi = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q = \varphi$ donc φ est bien un projecteur.

b) • Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}p + \operatorname{Ker}q$ par double inclusion.

– Soit $x \in \operatorname{Ker}p + \operatorname{Ker}q$: il existe $a \in \operatorname{Ker}p$ et $b \in \operatorname{Ker}q$ tels que $x = a + b$; on a alors, puisque $p \circ q = q \circ p$: $\varphi(x) = q \circ p(a) + p \circ q(b) = 0$ puisque $p(a) = q(b) = 0$.
Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Ker}p + \operatorname{Ker}q \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

– Soit $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a bien sûr : $x = q(x) + [x - q(x)]$; or $q(x) \in \operatorname{Ker}p$ puisque $p[q(x)] = \varphi(x) = 0$, et $x - q(x) \in \operatorname{Ker}q$ puisque $q\big[x - q(x)\big] = q(x) - q^2(x) = q(x) - q(x) = 0$.
Ainsi $x \in \operatorname{Ker}p + \operatorname{Ker}q$, ce qui prouve l'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}p + \operatorname{Ker}q$.

• Montrons que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q$ par double inclusion.
Pour cela, on utilisera plusieurs fois la propriété fondamentale suivante : l'image d'un projecteur est aussi l'ensemble de ses vecteurs invariants.

– Soit $x \in \operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q$. Alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$ donc $x = p \circ q(x) = \varphi(x)$ et $x \in \operatorname{Im}\varphi$.
Cela prouve l'inclusion $\operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q \subset \operatorname{Im}\varphi$.

– Soit $x \in \operatorname{Im}\varphi$. Alors $x = \varphi(x)$ donc $x = p[q(x)]$ et $x \in \operatorname{Im}p$ et $x = q[p(x)]$ donc $x \in \operatorname{Im}q$.
Finalement, $x \in \operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q$, ce qui achève la démonstration.

2. On démontre l'égalité $\operatorname{Ker}u = \operatorname{Ker}p \cap \operatorname{Ker}q$ par double inclusion.

– Si $x \in \operatorname{Ker}p \cap \operatorname{Ker}q$ alors $p(x) = q(x) = 0$ donc évidemment $u(x) = p(x) + q(x) = 0$. Cela démontre l'inclusion $\operatorname{Ker}p \cap \operatorname{Ker}q \subset \operatorname{Ker}u$.

– Soit $x \in \operatorname{Ker}u$. Alors $p(x) = -q(x)$. En appliquant p à cette égalité, puisque $p \circ p = p$, on obtient $p(x) = -p \circ q(x)$; en appliquant q on obtient de même $-q(x) = q \circ p(x)$; on a donc

$$p(x) = -p \circ q(x) = -q(x) = q \circ p(x) = p \circ q(x)$$

donc $p(x) = q(x) = 0$, et on a bien $x \in \operatorname{Ker}p \cap \operatorname{Ker}q$, ce qui prouve la deuxième inclusion cherchée.

3. a) $u - \alpha\varphi = p + q - \alpha pq$. Puisque p, q et pq commutent, et que $p^2 = p$, $q^2 = q$, on a :

$$(u - \alpha\varphi)^2 = p^2 + q^2 + 2pq - 2\alpha p^2 q - 2\alpha pq^2 + \alpha^2 p^2 q^2 = p + q + (\alpha^2 - 4\alpha + 2)pq$$

Donc :

$$\begin{aligned}(u - \alpha\varphi)^2 = u - \alpha\varphi &\iff (\alpha^2 - 4\alpha + 2)pq = -\alpha pq \iff (\alpha^2 - 3\alpha + 2)pq = 0\\ &\iff \underline{\alpha = 1 \text{ ou } \alpha = 2 \text{ ou } pq = 0}.\end{aligned}$$

b) – Si $x \in \operatorname{Ker}u$, alors $u(x) = 0$, et $x \in \operatorname{Ker}p \cap \operatorname{Ker}q$ (d'après 2.), d'où $p(x) = q(x) = 0$, et, par suite, $\varphi(x) = p \circ q(x) = 0$, puis $(u - \varphi)(x) = 0$. Ainsi : $\operatorname{Ker}u \subset \operatorname{Ker}(u - \varphi)$.

– Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(u - \varphi)$, on a : $u(x) = \varphi(x)$, d'où $p(x) + q(x) = p \circ q(x)$, puis, en appliquant p, on obtient : $p(x) + p \circ q(x) = p \circ q(x)$ d'où $p(x) = 0$, soit $x \in \operatorname{Ker}p$. On obtient de la même façon $x \in \operatorname{Ker}q$, d'où $x \in \operatorname{Ker}p \cap \operatorname{Ker}q = \operatorname{Ker}u$, soit $\operatorname{Ker}(u - \varphi) \subset \operatorname{Ker}u$, puis l'égalité.

4. – Si $x \in \operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q$, alors $p(x) = q(x) = x$, d'où $u(x) = p(x) + q(x) = 2x$, et $x \in E_2$. D'où l'inclusion $\operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q \subset E_2$.

– Réciproquement, si $x \in E_2$, on a $p(x) + q(x) = 2x$. En appliquant p, on obtient : $p(x) + p \circ q(x) = 2p(x)$ d'où $p(x) = p \circ q(x)$. De même, en appliquant q, on obtient : $q(x) = q \circ p(x)$.
Puisque $p \circ q = q \circ p$, on en déduit $p(x) = q(x)$, et finalement $p(x) = q(x) = x$. Donc $x \in \operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q$, et $E_2 \subset \operatorname{Im}p \cap \operatorname{Im}q$, ce qui donne l'égalité demandée.

5. a) Si $x \in E_1$, $u(x) = x$, d'où $p(x) + q(x) = x$. En appliquant p, on obtient $p(x) + p \circ q(x) = p(x)$, soit $\varphi(x) = p \circ q(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker}\varphi$.
Ainsi, $E_1 \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

b) Si $x \in \operatorname{Ker} p$, $p(x) = 0$ d'où $q(p(x)) = 0$ puis $p(q(x)) = 0$ et ainsi, $q(x) \in \operatorname{Ker} p$. Donc $\operatorname{Ker} p$ est stable par q.

c) – Soit $x \in E_1$. Puisque $x \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$ (cf. 5.a et 1.b), il existe $x_p \in \operatorname{Ker} p$ et $x_q \in \operatorname{Ker} q$ tels que $x = x_p + x_q$.
On a alors :

$$u(x) = p(x) + q(x) = p(x_p) + q(x_p) + p(x_q) + q(x_q) = q(x_p) + p(x_q)$$

et, puisque $u(x) = x$: $x = q(x_p) + p(x_q)$.
Or, $q(x_p) \in \operatorname{Ker} p$ (d'après 5.b), et, évidemment, $q(x_p) \in \operatorname{Im} q$.
Donc $q(x_p) \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, et, de même, $p(x_q) \in \operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p$.
Finalement, $x \in (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) + (\operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p)$, et $E_1 \subset (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) + (\operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p)$.

– Réciproquement, soit $x \in (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) + (\operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p)$. Alors, il existe $x_1 \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p$ tels que $x = x_1 + x_2$.
On a alors : $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$ (car $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} p$), et, de même, $q(x) = x_2$. On en déduit : $u(x) = p(x) + q(x) = x_1 + x_2 = x$, d'où : $x \in E_1$, soit l'inclusion réciproque, puis l'égalité cherchée.

– Enfin, la somme ci-dessus est directe car $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p = \{0\}$, puisque $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} q = \{0\}$ (p, q projecteurs).

d) – D'après ce qui précède, si $x \in E_1$, il existe $x_1 \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $x_2 \in \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$ tels que $x = x_1 + x_2$.
On a : $p(x_1) = x_1$; $q(x_1) = 0$; $p(x_2) = 0$; $q(x_2) = x_2$, d'où :

$$(p - q)(x_1 - x_2) = p(x_1) - q(x_1) - p(x_2) + q(x_2) = x_1 + x_2 = x\,.$$

Ainsi, $x = (p - q)(x_1 - x_2) \in \operatorname{Im}(p - q)$, et donc : $E_1 \subset \operatorname{Im}(p - q)$.

– Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im}(p - q)$,il existe $y \in E$ tel que $x = (p - q)(y)$, et on a alors : $(p + q)(x) = (p + q) \circ (p - q)(y) = (p^2 - q^2)(y) = (p - q)(y) = x$, d'où $x \in E_1$, et $\operatorname{Im}(p - q) \subset E_1$, puis enfin l'égalité cherchée.

6.
- i) $\Rightarrow$ ii) : si $E_2 = \{0\}$, alors $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = E_2 = \{0\}$ (d'après 1.b et 4.), d'où : $\varphi = 0$.
- ii) $\Rightarrow$ iii) : si $\varphi = p \circ q = q \circ p = 0$, alors $u^2 = (p + q)^2 = p + q = u$, donc u est un projecteur.
- iii) $\Rightarrow$ iv) : si u est un projecteur, alors $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} u$ directement d'après le cours.
- iv) $\Rightarrow$ i) : si $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} u$, alors, pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} u$ tels que $x = x_1 + x_2$.
  On a alors $u(x) = x_1$ donc :
  $x \in E_2 \Rightarrow u(x) = 2x \Rightarrow x_1 = 2(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (car $E_1 \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$), d'où $x = 0$.

  Finalement, on a bien $E_2 = \{0\}$.

7.
- i) $\Rightarrow$ ii) : $\operatorname{Ker} u = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker}(u - \varphi) = \{0\}$ (d'après 3.b). Or, d'après 3.a, $u - \varphi$ est un projecteur, d'où $u - \varphi = \mathrm{Id}_E$, et $u - \mathrm{Id}_E = \varphi$ est donc un projecteur (d'après 1.a).
- ii) $\Rightarrow$ iii) : si $u - \mathrm{Id}_E$ est un projecteur, alors, d'après le cours, :

$$E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}((u - \mathrm{Id}_E) - \mathrm{Id}_E)) = E_1 \oplus E_2\,.$$

- iii) $\Rightarrow$ i) : si $E = E_1 \oplus E_2$, alors, pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
  On a alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 + 2x_2$. Donc :
  $x \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (car $E_1 \cap E_2 = \{0\}$), d'où $x = 0$.

  Finalement, on a bien $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

8.
- i) $\Rightarrow$ ii) : si $E_1 = \{0\}$, alors $\operatorname{Im}(p - q) = \{0\}$ (d'après 5.d), d'où : $p = q$.
- ii) $\Rightarrow$ iii) : si $p = q$, alors $u = p + q = 2p$ donc $\dfrac{1}{2}u = p = q$ est un projecteur.
- iii) $\Rightarrow$ iv) : si $\dfrac{1}{2}u$ est un projecteur, alors, d'après le cours :

$$E = \operatorname{Ker}\left(\frac{u}{2}\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(\frac{u}{2} - \mathrm{Id}_E\right) = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}\left(u - 2\mathrm{Id}_E\right) = \operatorname{Ker} u \oplus E_2\,.$$

- iv) $\Rightarrow$ i) : si $E = \operatorname{Ker} u \oplus E_2$, alors $E_1 = \{0\}$: cela se démontre comme dans 6) (iv) $\Rightarrow$i)) ou dans 7) (iii) $\Rightarrow$ i))

9. a) $u = p + q$ d'où, puisque p et q commutent et vérifient $p^2 = p$ et $q^2 = q$: $u^2 = p + q + 2pq$ et $u^3 = p + q + 6pq$, d'où facilement : $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$.

b) Procédons par "analyse-synthèse", comme certains d'entre vous aiment le dire...

– Supposons que $E = \text{Ker}u \oplus\ E_1 \oplus\ E_2$. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $x_0 \in \text{Ker}\,u$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que : $x = x_0 + x_1 + x_2$.

D'où : $u(x) = x_1 + 2x_2$ et $u^2(x) = x_1 + 4x_2$.

Ainsi, *nécessairement*, $x_2 = \dfrac{u^2(x) - u(x)}{2}$, $x_1 = 2u(x) - u^2(x)$ et $x_0 = x - \dfrac{3}{2}u(x) + \dfrac{1}{2}u^2(x)$.
Cela prouve l'unicité de la décomposition, si elle existe.

– Réciproquement, pour tout $x \in E$, on a l'égalité évidente :

$$x = \left(x - \frac{3}{2}u(x) + \frac{1}{2}u^2(x)\right) + \left(2u(x) - u^2(x)\right) + \left(\frac{u^2(x) - u(x)}{2}\right)$$

et on vérifie alors que $x_0 = x - \dfrac{3}{2}u(x) + \dfrac{1}{2}u^2(x)$ appartient à $\text{Ker}\,u$:

$$u(x_0) = u(x) - \frac{3}{2}u^2(x) + \frac{1}{2}u^3(x) = u(x) - \frac{3}{2}u^2(x) + \frac{1}{2}\left(3u^2(x) - 2u(x)\right) = 0$$

et, de même, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

On a donc bien $E = \text{Ker}u +\ E_1 + E_2$, et la somme est directe d'après une remarque précédente.

EXERCICE 7 :

1. Pour plus de clarté, on rappelle ici les hypothèses : le diagramme ci-dessous est commutatif, et les deux lignes sont des suites exactes.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
\Big\downarrow{\scriptstyle a} & & \Big\downarrow{\scriptstyle b} & & \Big\downarrow{\scriptstyle c} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d} & & \Big\downarrow{\scriptstyle e} \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
\end{array}$$

a) On suppose donc ici a surjective et b et d injectives.

Pour montrer que c est injective, il suffit de montrer que $\text{Ker}\,c = \{0\}$.
Soit donc $x \in \text{Ker}\,c$. On a $c(x) = 0$ donc $h' \circ c(x) = 0$. Mais $h' \circ c = d \circ h$; on a donc $d \circ h(x) = 0$ et, puisque d est injective, cela implique $h(x) = 0$.

Ainsi, $x \in \text{Ker}\,h = \text{Im}\,g$: il existe $y \in B$ tel que $x = g(y)$. La relation $c(x) = 0$ donne alors $c \circ g(y) = 0$; mais $c \circ g = g' \circ b$, d'où $g'[b(y)] = 0$ et $b(y) \in \text{Ker}\,g' = \text{Im}\,f'$: il existe $z \in A'$ tel que $b(y) = f'(z)$.

Puisque a est surjective, il existe $t \in A$ tel que $z = a(t)$; on a donc $b(y) = f' \circ a(t)$. Mais $f' \circ a = b \circ f$ d'où $b(y) = b \circ f(t)$, ce qui implique, b étant injective, $y = f(t)$. Ainsi $y \in \text{Im}\,f$. Mais $\text{Im}\,f = \text{Ker}\,g$ donc $g(y) = 0$ soit $x = 0$: on a donc obtenu $\text{Ker}\,c = \{0\}$.

b) On suppose maintenant e injective et b et d surjectives.
Il faut montrer que c est surjective.

Soit donc $z \in C'$. Il faut montrer que z possède un antécédent par c.
$h'(z) \in D'$ et d surjective, donc il existe $y \in D$ tel que $h'(z) = d(y)$. D'autre part, $h'(z) \in \text{Im}\,h' = \text{Ker}\,i'$ donc $i' \circ h'(z) = 0$, soit $i' \circ d(y) = 0$ et puisque $i' \circ d = e \circ i$ on obtient $e \circ i(y) = 0$.

e injective implique $i(y) = 0$ soit $y \in \text{Ker}\,i = \text{Im}\,h$: il existe $x \in C$ tel que $y = h(x)$. Ainsi, $h'(z) = d(y) = d \circ h(x)$ et puisque $d \circ h = h' \circ c$ on obtient $h'(z) = h' \circ c(x)$ soit $h'[z - c(x)] = 0$.

Donc $z - c(x) \in \text{Ker}\,h' = \text{Im}\,g'$: il existe $t \in B'$ tel que $z - c(x) = g'(t)$ et puisque b est surjective, il existe $u \in B$ tel que $t = b(u)$, soit finalement $z - c(x) = g' \circ b(u)$. Mais $g' \circ b = c \circ g$ donc on a $z - c(x) = c \circ g(u)$ d'où $z = c[x + g(u)]$ et z appartient à $\text{Im}\,c$, ce qu'il fallait démontrer.

c) découle directement des deux résultats précédents.

2. Là encore, pour plus de clarté, rappelons les hypothèses : le diagramme ci-dessous est commutatif, les trois colonnes et les deux premières lignes sont des suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & F' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"] & F'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & G' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v'"] & G'' \arrow[r] \arrow[d, "v''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & H \arrow[r, "h"] \arrow[d] & H' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & H'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de démontrer que la dernière ligne est une suite exacte, ce qui équivaut à : h injective, h' surjective et $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} h'$.

- Démontrer que h' est surjective est assez simple.

  En effet, v'' et g' sont surjectives par hypothèse. Il en est donc de même de $v'' \circ g' = h' \circ v'$. La surjectivité de $h' \circ v'$ implique immédiatement celle de h'.

- Montrons maintenant que h est injective, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} h = \{0\}$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker} h$, c'est-à-dire $h(x) = 0$. v étant surjective, il existe $y \in G$ tel que $x = v(y)$ d'où $h \circ v(y) = 0$. Mais $h \circ v = v' \circ g$ donc $v' \circ g(y) = 0$, d'où $g(y) \in \operatorname{Ker} v' = \operatorname{Im} u'$. Il existe donc $z \in F'$ tel que $g(y) = u'(z)$.

  Puisque $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g'$, on aura $g' \circ g(y) = 0$ d'où $g' \circ u'(z) = 0$. Mais $g' \circ u' = u'' \circ f'$ donc $u'' \circ f'(z) = 0$. u'' étant injective, cela implique $f'(z) = 0$ donc $z \in \operatorname{Ker} f' = \operatorname{Im} f$: il existe $t \in F$ tel que $z = f(t)$.

  On a ensuite $g(y) = u' \circ f(t) = g \circ u(t)$. Puisque g injective, cela implique $y = u(t)$ donc $y \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} v$ d'où $v(y) = 0$ soit $x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

- Il reste à démontrer $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} h'$. Pour cela, nous allons procéder par double inclusion.
  - Montrons d'abord : $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Ker} h'$:

    Soit $z \in \operatorname{Im} h$; il existe $y \in H$ tel que $z = h(y)$. Puisque v est surjective, il existe $x \in G$ tel que $y = v(x)$ donc $z = h \circ v(x) = v' \circ g(x)$.
    On a alors $h'(z) = (h' \circ v') \circ g(x) = (v'' \circ g') \circ g(x) = 0$ puisque $g' \circ g = 0$ puisque $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g'$. Ainsi $z \in \operatorname{Ker} h'$, ce qui démontre l'inclusion cherchée.

  - Montrons maintenant : $\operatorname{Ker} h' \subset \operatorname{Im} h$:

    Soit $x \in \operatorname{Ker} h'$, c'est-à-dire $x \in H'$ et $h'(x) = 0$. Puisque v' surjective, il existe $y \in G$ tel que $x = v'(y)$ donc $h' \circ v'(y) = 0$ soit $v'' \circ g'(y) = 0$.

    Alors $g'(y) \in \operatorname{Ker} v'' = \operatorname{Im} u''$: il existe $z \in F''$ tel que $g'(y) = u''(z)$. f' étant surjective, il existe $t \in F'$,tel que $z = f'(t)$ donc $g'(y) = u'' \circ f'(t) = g' \circ u'(t)$.

    Par suite, $g'[y - u'(t)] = 0$ c'est-à-dire $y - u'(t) \in \operatorname{Ker} g'$. Mais $\operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} g$ donc il existe $a \in G$ tel que $y - u'(t) = g(a)$, soit $y = u'(t) + g(a)$.
    Par linéarité, on a ensuite $x = v'(y) = v' \circ u(t) + v' \circ g(a)$; or $v' \circ u' = 0$ puisque $\operatorname{Im} u' = \operatorname{Ker} v'$, et aussi $v' \circ g = h \circ v$, donc $x = h \circ v(a)$, ce qui implique $x \in \operatorname{Im} h$, ce qu'il fallait démontrer.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆