PROBLÉME ENSAIT 1999

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = \{1, X, X^2 ..., X^n\}$ sa base canonique.

Étant donné une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$, on lui associe les polynômes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall j \in [\![0\,;n]\!] - \{i\} \;,\; L_i(a_j) = 0 \quad \text{et} \quad L_i(a_i) = 1\,.$$

On note enfin A la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$.

Partie I : On prend ici $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

1. Donner L_0, L_1, L_2 .
   Montrer que $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Quelles sont les les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base $\{L_0, L_1, L_2\}$?
2. Former la matrice A de changement de base de $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ à $\mathscr{B}' = \{L_0, L_1, L_2\}$, et déterminer les vecteurs $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $AV = V$.
3. En déduire les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que

$$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2\,.$$

Partie II : Retour au cas général.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Indiquer les composantes sur la base $\mathscr{B}'$ d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que A est inversible, calculer son inverse
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.
   En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est nulle.

Partie III : Étude du cas $a_0 = 0$.

1. Montrer que la matrice $A - I_{n+1}$ n'est pas inversible.
2. Montrer qu'il existe des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$, différents du polynôme nul, tels que : $\displaystyle P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) X^i$.

Partie IV : Étude du cas $a_0 = 1$.

Montrer que la somme des éléments de la première colonne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre colonne de A est nulle.

Partie V : Étude du cas $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, \dots, a_n = n$.

On note dorénavant $L_{i,p}$ le polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0\,;p]\!] - \{i\} \quad L_{i,p}(j) = 0 \quad \text{et} \quad L_{i,p}(i) = 1$$

et on convient que $L_{0,0} = 1$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'' = \{L_{0,0}, L_{1,1}, L_{2,2}, \dots, L_{n,n}\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Soit le polynôme $\displaystyle P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_{k,k}$, déterminer ses racines.

2. **a)** Écrire la matrice de changement de base de $\mathscr{B}' = \{L_{0,n}\ ,\ L_{1,n}\ ,\ L_{2,n}, \dots,\ L_{n,n}\}$ à $\mathscr{B}''$.

b) Montrer que l'on peut écrire la matrice A comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

c) Effectuer tous les calculs du V 2) b) pour $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.
