CORRIGÉ PROBLÉME ENSAIT 1999

Partie I : On prend ici $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

1. • Puisque $L_0(1) = L_0(2) = 0$, L_0 admet 1 et 2 comme racines ; étant de degré $\leqslant 2$, il s'écrit $L_0 = \alpha(X-1)(X-2)$; puisque $L_0(0) = 1$, on trouve $\alpha = \dfrac{1}{2}$. On procède de la même façon pour les deux autres polynômes. Finalement :

$$\boxed{L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}\ ;\ L_1 = -X(X-2)\ ;\ L_2 = \frac{X(X-1)}{2}.}$$

• Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aL_0 + bL_1 + cL_2 = 0$. En prenant succeviement les valeurs en 0, 1 et 2 on trouve immédiatement $a = b = c = 0$.
(L_0, L_1, L_2) est une famille libre de 3 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3 donc :

$$\boxed{\mathscr{B}' = (L_0, L_1, L_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X] .}$$

• $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = \sum_{i=0}^{2} P(a_i)L_i$: en effet, ces deux polynômes sont de degré $\leqslant 2$ et coïncident en a_0, a_1 et a_2. Donc $\boxed{\text{les composantes dans } \mathscr{B}' \text{ de } P \text{ sont } (P(0), P(1), P(2)) .}$

2. En développant les expressions trouvées auparavant, on a $L_0 = \dfrac{X^2}{2} - 3\dfrac{X}{2} + 1$, $L_1 = -X^2 + 2X$ et $L_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2}$

donc la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est A avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

D'après les formules du cours, si un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = \alpha' L_0 + \beta' L_1 + \gamma' L$ (coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$), on a la relation $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$. Donc on a

$P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$.

La résolution du système $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ conduit facilement à $x = y = -z$ donc :

$$\boxed{P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff \exists k \in \mathbb{R}\ ,\ P(X) = k\left(1 + X - X^2\right) .}$$

Partie II : Retour au cas général.

1. Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in R^{n+1}$. Si $Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0$ alors $\forall j \in [\![0\,; n]\!]$ $Q(a_j) = \lambda_j = 0$.

Ainsi $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de $(n+1)$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $(n+1)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall P \in R_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$ car ces deux polynômes de degré $\leqslant n$ coïncident pour les n+1 valeurs distinctes a_k, donc $\boxed{\text{les composantes dans } \mathscr{B}' \text{ de } P \text{ sont } (P(a_0), P(a_1), ...P(a_n)) .}$

2. A est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$
A^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$; or d'après la question précédente , $\forall j \in [\![0\,;n]\!]$, $X^j = \sum_{i=0}^{n} a_i^j L_i$.

donc $\boxed{A^{-1} = (m_{ij})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} \text{ avec } m_{ij} = a_i^j}$ soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_i & a_i^2 & & a_i^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{pmatrix}$.

3. Soit $Q = \sum_{i=0}^{n} L_i - 1$. Pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $Q(a_j) = 0$.
Ainsi Q est un polynome de degré inférieur ou égal à n, il a au moins $(n+1)$ racines, il est donc nul et on en tire $\boxed{\sum_{i=0}^{n} L_i = 1\ .}$

Les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de $\sum_{j=0}^{n} L_j$ sont donc $(1, 0, \ldots, 0)$; or la somme des éléments de la i-ème ligne de A n'est autre que la coordonnée sur X^i de ce polynôme. Il en résulte que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1 et que la somme des éléments de toute autre ligne est égale à 0.

Partie III : Étude du cas $a_0 = 0$.

1) La première coordonnée dans la base $\mathscr{B}$ de chaque L_j est $L_j(0)$, donc la première ligne de la matrice A est $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ (car $L_j(a_0) = 0$ si $j \neq 0$).
La matrice $A - I_{n+1}$ possède donc une ligne formée de zéros, et par suite n'est pas inversible.
En reprenant exactement le même raisonnement que celui fait dans la partie I, on obtient qu'un polynôme P vérifie $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)X^i$ si et seulement si ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont les mêmes, ce qui équivaut à $AV = V$ en notant $V = \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$.
Or la matrice $A - I_{n+1}$ n'étant pas inversible, il existe un vecteur colonne V non nul tel que $(A - I_{n+1})V = 0$ (car $\text{Ker}(A - I_{n+1}) \neq \{0\}$), ce qui démontre bien que

$$\boxed{\exists\ P \in R_n[X]\ ,\ P \neq 0\ \text{ tq }\ P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)X^i\ .}$$

Partie IV : Étude du cas $\mathbf{a}_0 = 1$

Par définition de la matrice A, $L_j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}X^i$ donc $L_j(1) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}$.
Comme $L_0(1) = 1$ et $L_j(1) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant n$, la somme des éléments de la première colonne de A est égale à 1 et la somme des éléments de toute autre colonne est égale à 0.

Partie V : Étude du cas $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, ...a_n = n$.

1. • $L_{0,0} = 1$ et pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $L_{k,k} = \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)}{k!}$ donc le degré de $L_{k,k}$ est égal à k.

$(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés de 0 à n, c'est donc une famille libre de $(n+1)$ éléments avec $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ donc $\boxed{\mathscr{B}'' = (L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

- Si $j \in \mathbb{N}$, $L_{k,k}(j) = \binom{j}{k}$ (en particulier $L_{k,k}(j) = 0$ si $k > j$).

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_{k,k}$. Alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ $P(j) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} = (1-1)^j = 0$.

Ainsi $1, 2, \dots, n$ sont racines de P et $\deg(P) \leqslant n$ donc ce sont exactement *les* racines de P :

$$\boxed{\text{les racines de } P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_{k,k} \text{ sont } 1, 2, \dots, n.}$$

Rem : on peut en déduire $P = \dfrac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} (X - i)$, mais cela n'était pas demandé...

2. a) Soit $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}''$.

D'après **II.1**, $\forall j \in [\![0\,;n]\!]$, , $L_{j,j} = \sum_{i=0}^{n} L_{j,j}(i) L_{i,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{j} L_{i,n}$. Donc :

$$\boxed{P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = (m_{ij})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} \quad \text{avec } m_{ij} = \binom{i}{j}}$$

(avec toujours la convention habituelle : $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$).

$P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ est donc une matrice triangulaire inférieure.

b) $A = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} \times P_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} \times \left(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}\right)^{-1}$.

Comme, pour tout k, le degré de $L_{k,k}$ est égal à k, la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$ est triangulaire supérieure.

La matrice inverse d'une matrice triangulaire inférieure étant triangulaire inférieure , $\left(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}\right)^{-1}$ est triangulaire inférieure.

c) Ici $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

$$P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \left(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

donc $$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$