PROBLEME 2 (extrait de CCP MP 2014)

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \ | \ \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \ \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle.$$

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \ \ \langle s(x)|x\rangle \geqslant 0 \ \ (\text{respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \ \ \langle s(x)|x\rangle > 0).$$

Une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ {}^tX\,SX \geqslant 0 \ \ (\text{respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ \ {}^tX\,SX > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ \ (\text{inégalité arithmético-géométrique}).$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires

1.

1.a Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

1.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

2. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x)|x\rangle.$$

2.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

2.b En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

3.

3.a On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

3.b Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \ \ \lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tM\,M - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \ |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (= fermée bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \mathrm{Tr}(AS)$.

7.a Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

7.b Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.

7.c Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$

9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^tD\,S\,D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}(S_\alpha)$.

10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \quad \text{(inégalité d'Hadamard).}$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega\Delta\,{}^t\Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t\Omega\, A\Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

13. Démontrer que $\{\mathrm{Tr}(AS),\ A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

16. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Déterminer le réel m.