CORRIGÉ DU DM N°10 (extrait de CENTRALE TSI 2013)

PARTIE I : Réduction des matrices réelles d'ordre 2

I.A - *Généralités*

I.A.1) Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul rapide donne directement

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det A.$$

I.A.2) Le discriminant du polynôme caractéristique est donc $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det A$.

– Supposons d'abord A diagonalisable dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.
Alors, dans le cas $\Delta = 0$, A admet une seule valeur propre λ_0 (d'ailleurs, λ_0 est nécessairement un réel puisque A est à coefficients réels) ; étant diagonalisable, elle est semblable à $\lambda_0 I_2$, soit $A = P^{-1}(\lambda_0 I_2)P$ avec $P \in GL_2(\mathbb{C})$, d'où $A = \lambda_0 I_2$.

– Supposons la propriété de l'énoncé réalisée, c'est-à-dire $\Delta \neq 0$ ou $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}$ tq $A = \lambda_0 I_2$.
  – Dans le cas $\Delta \neq 0$, le polynôme caractéristique de A admet deux racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ et est par suite diagonalisable dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.
  – Dans le second cas, A est diagonale donc a fortiori diagonalisable.

  Dans les deux cas, A est diagonalisable ce qui montre l'implication cherchée.

I.A.3) Le raisonnement est similaire à celui ci-dessus ; il faut juste remarquer en plus que, lorsque A est diagonalisable dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, elle admet nécessairement 1 ou 2 valeurs propres réelles, donc son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et a donc un discriminant positif (et réciproquement).

I.B - *Applications*

I.B.1) On a $X_{k+1} = AX_k$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

I.B.2) Par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k = A^k X_0$.

I.B.3) Ici $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$. A ayant deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Notons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathbb{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $V_2 = E_1 + E_2 \in \mathrm{Ker}(A - 2I_2)$; $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ donc $V_3 = 2E_1 + E_2 \in \mathrm{Ker}(A - 3I_2)$.

La famille (V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de A et si l'on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres , on a donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

I.B.4) On aura donc (classiquement) : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

et enfin $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3^k - 2^k & -2.3^k + 2^{k+1} \\ 3^k - 2^k & -3^k + 2^{k+1} \end{pmatrix}$.

I.B.5) Puisque $X_k = A^k X_0$ on aura $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 3.2^k - 2.3^k \quad \text{et} \quad v_k = 3.2^k - 3^k.$$

PARTIE II : Réduction de matrices d'ordre 3 ou 4

II.A - *Le cas* n = 3

II.A.1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I_3$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de k par 3 s'écrit $k = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$, d'où
$$J^k = J^{3q+r} = (J^3)^q J^r = I_3 J_r = J^r.$$

II.A.2) La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle pour $n \geqslant 2$. Ici, $1, j$ et j^2 sont les racines cubiques de l'unité, et $1 + j + j^2 = 0$.

II.A.3) Un calcul simple donne $\chi_J(\lambda) = 1 - \lambda^3$ d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \left\{1, j, j^2\right\}$.

II.A.4) J admettant trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$.

On a clairement $J.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(J - I_3)$ est la droite vectorielle de base $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $J.V = jV \Longleftrightarrow \begin{cases} -jx + y = 0 \\ -jy + z = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = jx \\ z = j^2 x \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}(J - jI_3)$ est la droite vectorielle de base $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

De la même façon, $\mathrm{Ker}(J - j^2 I_3)$ est la droite vectorielle de base $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ (on rappelle que $j^2 = \overline{j}$).

(V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de J dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à J a pour matrice $D = \mathrm{diag}(1, j, j^2)$, c'est-à-dire que l'on a $J = PDP^{-1}$ avec P matrice de passage de la base canonique à la base (V_1, V_2, V_3) soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

II.A.5)

a) $A(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

b) Puisque $J = PDP^{-1}$ et $J^2 = PD^2P^{-1}$ on aura $A(a, b, c) = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$, avec
$aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$ diagonale, donc $A(a, b, c)$ est diagonalisable, et la matrice de passage P ne dépend pas de a, b, c.

c) Les valeurs propres de $A(a, b, c)$ sont donc les éléments diagonaux de la matrice $aI_3 + bD + cD^2$ à savoir $a + b + c$, $a + bj + cj^2$ et $a + bj^2 + cj$.

d) On en déduit ensuite : $\det A = \det(aI_3 + bD + cD^2) = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$. Le calcul direct du déterminant donne aussi $\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, d'où la jolie identité remarquable :
$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \ , \ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj).$$

II.A.6)

a) E est l'ensemble des combinaisons linéaires de I_3, J et J^2 ; c'est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par ces 3 matrices.

b) (I_3, J, J^2) est donc une famille génératrice de E ; d'autre part il est immédiat de vérifier que $aI_3 + bJ + cJ^2 = O_3 \Longrightarrow a = b = c = 0$ donc c'est aussi une famille libre et par suite c'est une base de E. D'où $\dim E = 3$.

II.B - *Le cas* n ⩾ 3 *quelconque*

II.B.1) Compte tenu de la définition de u et de la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a : $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

II.B.2) $u(x_\omega) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k\right) = u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} \omega^{k-1} u(e_k) = e_n + \sum_{k=2}^{n} \omega^{k-1} e_{k-1} = \omega^n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k e_k = \sum_{k=1}^{n} \omega^k e_k$

donc $u(x_\omega) = \omega x_\omega$.

II.B.3) Le calcul précédent montre que toute racine n-ième de l'unité, ω, est valeur propre de u (car $x_\omega \neq 0$ en est un vecteur propre associé).

u possède donc n valeurs propres distinctes, et $\dim(\mathbb{C}^n) = n$; par suite, u est diagonalisable.

Si l'on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0;n-1]\!]$ les n racines n-ièmes de l'unité, une base de vecteurs propres de u est formée des vecteurs $\left(x_{\omega_0}, x_{\omega_1}), \ldots, x_{\omega_{n-1}}\right)$.

II.B.4) Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $u(x_{\omega_k}) = \omega_k x_{\omega_k}$ donc $u^n(x_{\omega_k}) = \omega_k^n x_{\omega_k} = x_{\omega_k}$. Les x_{ω_k} formant une base de $\mathbb{C}^n$, on en déduit que $u^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$ (on pouvait aussi calculer directement les $u^n(e_i)$, nul besoin de diagonaliser).

II.C - *Le cas* $\mathbf{n} = 4$

II.C.1) $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}^4 = \mathrm{I}_4$.

II.C.2) Les racines quatrièmes de l'unité sont $1, \mathrm{i}, -1$ et i. D'après les résultats de **II.B**, U est diagonalisable, et $\mathrm{U} = \mathrm{PDP}^{-1}$, où $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$ et où P est la matrice de passage de la base canonique à la base

$\left(x_{\omega_0}, x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, x_{\omega_3}\right)$ c'est-à-dire $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1^2 & \mathrm{i}^2 & (-1)^2 & (-\mathrm{i})^2 \\ 1^3 & \mathrm{i}^3 & (-1)^3 & (-\mathrm{i})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Puisque $\mathrm{V} = a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{U} + c\mathrm{U}^2 + d\mathrm{U}^3$, on aura $\mathrm{V} = \mathrm{P}(a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3)\mathrm{P}^{-1}$. Puisque la matrice $a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3$ est diagonale, la matrice V est diagonalisable ; ses valeurs propres sont les termes diagonaux de la matrice $a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3$, c'est-à-dire $a+b+c+d$, $a+\mathrm{i}b-c-\mathrm{i}d$, $a-b+c-d$ et $a-\mathrm{i}b-c-\mathrm{i}d$, une base de vecteurs propres associés étant $\left(x_{\omega_0}, x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, x_{\omega_3}\right)$.

PARTIE III : Méthodes numériques de calcul.

III.A - *Le calcul du polynôme caractéristique*

III.A.1) D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a : $\mathrm{A}^n = a_{n-1}\mathrm{A}^{n-1} + a_{n-2}\mathrm{A}^{n-2} + \ldots + a_0\mathrm{I}_n$ donc en multipliant par X_0 à droite, on obtient l'égalité demandée.

III.A.2) En considérant la matrice $\tilde{\mathrm{A}}$ écrite par blocs sous la forme $\tilde{\mathrm{A}} = \left[\mathrm{X}_0 \quad \mathrm{AX}_0 \quad \ldots \quad \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}_0\right]$, c'est-à-dire dont la j-ième colonne est $\mathrm{A}^{j-1}\mathrm{X}_0$, l'égalité de la question précédente s'écrit $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{X} = \mathrm{B}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$

et $\mathrm{B} = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

III.A.3) Si la famille $\left(\mathrm{X}_0, \mathrm{AX}_0, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}_0\right)$ est libre, les colonnes de la matrice $\tilde{\mathrm{A}}$ sont indépendantes ; $\tilde{\mathrm{A}}$ est donc inversible et le système $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{X} = \mathrm{B}$ est de Cramer (c'est-à-dire possède une solution unique).

L'énoncé est ici inachevé ! En effet, on ne voit pas bien à quoi servent ces questions ! On pouvait remarquer que, si l'on part d'un vecteur X_0 quelconque, on peut alors calculer la matrice $\tilde{\mathrm{A}}$ en calculant simplement les $\mathrm{A}^k\mathrm{X}_0$ pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, puis, en résolvant le système $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{X} = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$, on trouve le vecteur X c'est-à-dire les coefficients du polynôme caractéristique (sauf si par malheur le choix de X_0 conduit à un système qui n'est pas de Cramer !). C'est la **méthode de Krylov**.

III.B - *Le calcul approché des valeurs propres*

III.B.1) On montre que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles :

– F est non vide, car il contient la suite nulle.

– Soient x et y deux suites de F, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\lambda x + y\right)_{n+k} &= \lambda x_{n+k} + y_{n+k} \\
&= \lambda\left(a_{n-1}x_{k+n-1} + a_{n-2}x_{k+n-2} + \dots a_0 x_k\right) + \left(a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \dots a_0 y_k\right) \\
&= a_{n-1}\left(\lambda x + y\right)_{k+n-1} + a_{n-2}\left(\lambda x + y\right)_{k+n-2} + \dots + a_0\left(\lambda x + y\right)_k
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $\lambda x + y$ appartient à F et démontre le résultat annoncé.

III.B.2) Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ λ_j est une valeur propre de A, donc est racine de son polynôme caractéristique c'est-à-dire $\lambda_j^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i$. On aura alors, pour tout entier $k \geqslant 0$: $\lambda_j^{n+k} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^{i+k}$, ce qui signifie que la suite $\left(\lambda_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est élément de F.

III.B.3) • Démontrons d'abord les propriétés admises par l'énoncé :

– L'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ y & \longmapsto & (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{array}\right.$ est linéaire (vérification facile) et bijective, puisque toute suite élément de F est entièrement déterminée, et ce de façon unique, par la donnée de ses n premiers termes.

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où $\dim \mathrm{F} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

– Les λ_j étant n réels distincts, montrons que les suites $\left(\lambda_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre.

Pour cela, supposons qu'il existe une combinaison linéaire de ces suites qui soit égale à la suite nulle, c'est-à-dire qu"il existe n scalaires α_i tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k = 0$.

On a alors, en particulier, lorsque $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, le système $\left\{\begin{array}{lcc} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \dots + \alpha_n\lambda_n & = & 0 \\ \alpha_1\lambda_1^2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \dots + \alpha_n\lambda_n^2 & = & 0 \\ \dots & \dots & \\ \alpha_1\lambda_1^{n-1} + \alpha_2\lambda_2^{n-1} + \dots + \alpha_n\lambda_n^{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$

.

Il s'agit d'un système linéaire homogène dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est une matrice de Vandermonde inversible, les λ_j étant distincts. Par suite ce système possède pour seule solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, ce qui démontre le résultat annoncé.

• D'après ce qui précède, les suites $\left(\lambda_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $j \in [\![1\,;n]\!]$ forment une famille libre de n éléments dans l'espace vectoriel F de dimension n, donc en forment une base. Toute suite y de F s'écrit donc comme combinaison linéaire de façon unique de ces suites, c'est-à-dire qu'il existe n réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k$.

II.B.4)a) Avec les notations précédentes, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{y_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k$. Puisque pour $j \geqslant 2$ $\left|\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1$ on a $\lim_{k\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0$ d'où $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{y_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1$. Puisque $\alpha_1 \neq 0$ on en déduit $y_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \alpha_1 \lambda_1^k$.

b) λ_1 est non nulle puisque l'énoncé a supposé $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$. On a donc pour tout entier k $\alpha_1\lambda_1^k \neq 0$ et l'équivalent trouvé ci-dessus implique que y_k est non nul au moins à partir d'un certain rang (résultat du cours).

c) On peut donc pour k assez grand considérer le quotient $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}$, et l'on aura $\dfrac{y_{k+1}}{y_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_1\lambda_1^{k+1}}{\alpha_1\lambda_1^k}$ puis $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{y_{k+1}}{y_k} = \lambda_1$.

II.B.5) Je vois ici deux réponses possibles, pas très satisfaisantes (erreurs d'arrondi nombreuses et qui s'accumulent !) :

- Une fois λ_1 obtenu, on peut effectuer la division euclidienne du polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$ par $\lambda - \lambda_1$, et réitérer le processus avec le nouveau polynôme obtenu et de nouvelles suites définies par récurrence...
- On peut aussi considérer la suite (z_k) définie par $z_k = y_k - \alpha_1 \lambda_1^k$ (où α_1 aura été calculé en utilisant $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{y_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1$). Ainsi, $z_k = \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j^k$ et, en supposant que α_2 est non nul, on aura alors, de la même façon que ci-dessus, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{z_{k+1}}{z_k} = \lambda_2$.

III.C - *Illustration sur un exemple*

III.C.1) Pour la matrice A de l'exemple, on trouve $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$.

III.C.2) D'après Cayley-Hamilton on a $A^2 = 3A - 2I_2$; la relation de récurrence associée est donc : $y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k$.

III.C.3) Pas de difficulté ici.

```
def Suite_DM10(n):
    # les n premiers termes de la suite
    y0 = 0
    y1 = 1
    suite = [y0, y1]
    for i in range(n-2):
        y = 3*y1 - 2*y0
        suite.append(y)
        y0 = y1
        y1 = y
    return suite

print (Suite_DM10(10))
```

Remarque : les méthodes habituelles pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 donne facilement $y_k = 2^k - 1$. Donc le programme précédent n'a strictement aucun intérêt...

III.C.4) Puisqu'on ne connaît pas λ_1, (enfin si, mais on fait semblant...) on ne peut pas directement trouver k tel que $\left|\dfrac{y_{k+1}}{y_k} - \lambda_1\right| < \varepsilon$.

On peut écrire un programme un peu plus élaboré qui détermine la valeur de l'entier k tel que $\left|\dfrac{y_{k+2}}{y_{k+1}} - \dfrac{y_{k+1}}{y_k}\right| < \varepsilon$ où ε est donné, puis qui renvoie la valeur de k et l'approximation obtenue. Pour cela, il suffit de ne stocker à tout instant que les valeurs de y_k, y_{k+1} et y_{k+2}. Puisque $y_0 = 0$, on commencera à $k = 1$:

```
def ApproxValeurPropre(eps):
    k =1
    yk = 1   # représente y[k]
    yk1 = 3  # représente y[k+1]
    yk2 = 7  # représente y[k+2]
    quotient1 = yk1 / yk
    quotient2 = yk2 / yk1
    while abs(quotient2 - quotient1) > eps:
        k = k+1
        yk3 = 3*yk2 - 2*yk1
        quotient1 = quotient2
        quotient2 = yk3 / yk2
        yk = yk1
        yk1 = yk2
        yk2 = yk3
    return (k, quotient2)

S = ApproxValeurPropre(1e-6)
print(" rang k = ",S[0],"valeur approchée = ",S[1])
```

Remarque : là encore, puisque l'on sait ici que $y_k = 2^k - 1$ et $\lambda_1 = 2$, ce programme n'a guère d'intérêt !