CORRIGÉ DM N°4

PROBLÈME 1 - BANQUE PT 2015

Dans tout ce corrigé, je confondrai un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

I. PARTIE I

1. a) Les coordonnées de $f(e_1)$ sont celles de la 1ère colonne de la matrice A, donc $f(e_1) = (-7, 9, 7, -4)$.
Celles de $f^2(e_1)$ s'obtiennent alors en faisant le produit matriciel :

$$f^2(e_1) = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

b) Par la méthode du pivot :

$$\operatorname{rg}\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -30 \\ 0 & -9 & -90 \\ 0 & 7 & -70 \\ 0 & -4 & 40 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 7C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 30C_1}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -90 \\ 0 & 7 & -70 \\ 0 & -4 & 40 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{rg}\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) = 2$ et on a

$$f^2(e_1) + 30e_1 = -10\big(f(e_1) + 7e_1\big) \quad \text{soit} \quad f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0\,.$$

Rem : en lisant la suite de l'énoncé, on pouvait d'ailleurs se contenter de vérifier cette relation pour répondre à la question !

2. On calcule :

$$f^2(e_2) = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ -70 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix},$$

et on vérifie directement $f^2(e_2) + 10f(e_2) + 100e_2 = 0$, ce qui montre que la famille $\big(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\big)$ est liée.

3. On calcule :

$$\det\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & -16 \\ 0 & 9 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = 65\,.$$

Ce déterminant étant non nul, la famille $\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ forme une base de $\mathbb{R}^4$

4. La relation : $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$ est vraie pour e_1 d'après la question **1.**, donc en lui appliquant f elle l'est aussi pour $f(e_1)$.
De même elle est aussi vérifiée pour e_2 et $f(e_2)$.
Finalement, l'endomorphisme $f^2 + 10f + 100\mathrm{Id}$ étant nul sur tous les vecteurs d'une base, il l'est sur $\mathbb{R}^4$.

5. Compte tenu de la relation $f^2(x) = -100x - 10f(x)$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = \big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ est :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -100 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le polynôme caractéristique de f (calcul du déterminant par blocs) :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X & 100 & 0 & 0 \\ -1 & X+10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & \\ 0 & 0 & -1 & X+10 \end{vmatrix} = (X^2+10X+100)^2.$$

Ce polynôme n'ayant pas de racine réelle, f n'est pas diagonalisable.

Rem : plus rapidement, on pouvait remarquer que le polynôme $X^2+10X+100$ est annulateur de f d'après la question précédente ; ce polynôme n'ayant pas de racine réelle, $\mathrm{Sp}(f)=\emptyset$, puisque les valeurs propres d'un endomorphisme sont incluses dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur.

6. Donc A ne l'est pas non plus dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Elle l'est par contre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, puisqu'elle annule le polynôme $X^2+10X+100$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

La question était ambiguë, puisque l'énoncé ne précise pas $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

II. PARTIE II

1. $E_x = \mathrm{Vect}\left(\{f^n(x) \mid n\in\mathbb{N}\}\right)$ donc, puisque l'image d'un sous-espace vectoriel est engendrée par les images d'un système générateur :

$$f(E_x) = \mathrm{Vect}\left(\{f^{n+1}(x) \mid n\in\mathbb{N}\}\right),$$

ce qui montre que $f(E_x)\subset E_x$: E_x est stable par f.

Rem : E_x s'appelle le sous-espace cyclique engendré par x.

2. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ qui est stable par f et qui contient x, alors par récurrence immédiate, il contient tous les $f^n(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$ donc il contient E_x car c'est un sous-espace vectoriel.

3. a) L'ensemble $\{k\in\mathbb{N}^* \mid (x_0,x_1,\dots,x_{k-1}) \text{ est libre}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car elle contient 0, puisque $x_0\neq 0$), et majorée par d (puisque toute partie libre dans un espace vectoriel de dimension d a moins de d éléments).

Elle admet donc un plus grand élément noté p.

b) Par définition de p, la famille $(x_0,\dots,x_p)$ est liée, donc puisque la famille $(x_0,\dots,x_{p-1})$ est libre, x_p est combinaison linéaire de $x_0,\dots,x_{p-1}$ (d'après un résultat du cours).

c) Puisque $E'_x = \mathrm{Vect}\left(\{x_0,\dots,x_{p-1}\}\right)$, on a

$$f(E'_x) = \mathrm{Vect}\left(\{f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_{p-1})\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{x_1,\dots,x_p\}\right),$$

donc $f(E'_x)\subset E'_x$ d'après la question précédente : E'_x est stable par f.

d)
- D'après la question **2.** appliquée à $F=E'_x$ (qui est bien stable par f d'après la question précédente), on a donc $E_x\subset E'_x x$.
  L'inclusion inverse étant immédiate, on a donc l'égalité $E'_x=E_x$.
- La famille $(x_0,\dots,x_{p-1})$ étant génératrice de E'_x par définition, et libre, c'en est une base.

4. Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base, et avec les notations de l'énoncé, on a directement :

$$M_{\mathscr{B}_p}(\hat f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Rem : une telle matrice s'appelle une matrice compagnon.

5. Soient $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ une famille de réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i \hat f_i = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)}$.

Alors en particulier on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i \hat f_i(x_0) = 0_{\mathbb{R}^d}$, et puisque la famille $(x_0,\dots,x_{p-1})$ est libre, on en déduit que tous les λ_i sont nuls.

Cela prouve que la famille $(\hat f_0,\dots,\hat f_{p-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E_x)$.

6. a) Par hypothèse on a :

$$\hat{f}^p(x_0) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i(x_0)\,.$$

En appliquant $\hat{f}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant p-1)$ à cette égalité, on obtient :

$$\hat{f}^p(x_k) = \hat{f}^p\big(\hat{f}^k(x_0)\big) = \hat{f}^k\big(\hat{f}^p(x_0)\big) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^k\big(\hat{f}^i(x_0)\big) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i\big(\hat{f}^k(x_0)\big) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i(x_k)\,.$$

b) Ainsi l'endomorphisme $\hat{f}^p - \sum_{i=0}^{p-1} \hat{f}^i$ s'annule sur tous les vecteurs de la base $\mathscr{B}_p$ de E_x. C'est donc l'endomorphisme nul.

III. PARTIE III

1. Grosse erreur d'énoncé : il faut évidemment supposer x **non nul** sinon la suite n'a pas de sens (en particulier l'entier q de l'énoncé n'existe pas !).

a) Puisque f est supposé diagonalisable avec p valeurs propres distinctes λ_i, on a par définition :

$$E = \bigoplus_{i=0}^{p-1} E_{\lambda_i}(f)\,,$$

et la question posée revient simplement à décomposer un vecteur $x \in E$ dans cette somme directe (cette décomposition est donc unique).

b) Par hypothèse $x_1, \ldots, x_q$ sont q vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts, ils forment donc un système libre d'après un théorème du cours.

c) Puisque $f(x_i) = \lambda_i x_i$ par définition, on en déduit facilement, pour tout $k \in [\![0\,;q-1]\!]$: $f^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$ donc par linéarité :

$$f^k(x) = f^k\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = f^k\left(\sum_{i=1}^{q} x_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i\,.$$

d) On a donc :

$$0 = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{k+1} f^k(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i\right) = \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{k+1}\lambda_i^k\right) x_i = \sum_{i=1}^{q} P(\lambda_i) x_i\,,$$

et puisque les x_i forment une famille libre, on en déduit $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;q]\!]$.

e) Ainsi le polynôme P, de degré $\leqslant q-1$, admet-il q racines distinctes ; c'est donc le polynôme nul, c'est-à-dire que $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![1\,;q]\!]$.
Cela implique que la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big)$ est libre.

f) Les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x), f^q(x)$, au nombre de $q+1$, appartiennent tous à $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_q)$, espace de dimension q. Ils forment donc un système lié, et d'après la question précédente, on en déduit que $f^q(x)$ est combinaison linéaire de la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big)$.

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $k \geqslant q$, $f^k(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big)$, d'où l'inclusion $E_x \subset \mathrm{Vect}\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big)$. L'inclusion inverse étant immédiate, on a donc l'égalité :

$$E_x = \mathrm{Vect}\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big)\,.$$

Enfin, on a $\mathrm{Vect}\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_q)$, et comme il s'agit de deux espaces de dimension q, on a l'égalité.

2. Soit $x \in F$, **non nul** (le cas $x = 0$ est immédiat). On peut donc l'écrire comme précédemment $x = \sum_{i=1}^{q} x_i$ avec x_i dans E_i, non nul.
On a vu à la question précédente que $E_x = \mathrm{Vect}\big(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)\big) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_q)$; en particulier, les x_i appartiennent à E_x donc à F car F stable par f donc à $F_i = E_i \cap F$ (et cela reste vrai pour $x_{q+1}, \ldots, x_p$, qui sont nuls).

Rem : cette question se termine en « queue de poisson » ! Une suite logique eût été d'en déduire $F = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$*, c'est-à-dire que l'endomorphisme induit par* f *sur* F *est encore diagonalisable, résultat qui figure d'ailleurs dans le programme PSI.*

3. a) On calcule facilement le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f = X(X-1)(X-2)\,.$$

Ainsi f possède 3 valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3 : il est diagonalisable.

b) Je ne détaille pas les calculs (certains se font d'ailleurs de tête : les sous-espaces propres étant de dimension 1, il suffit à chaque fois de trouver un vecteur propre). On trouve :

$$E_0(f) = \text{Vect}\big((1,-1,0)\big) \quad , \quad E_1(f) = \text{Vect}\big((1,-1,-1)\big) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \text{Vect}\big((0,1,1)\big)\,.$$

c) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par F. On envisage tous les cas :
- si $\dim F = 0$, $F = \{0\}$;
- si $\dim F = 1$, F est nécessairement engendré par un vecteur propre, c'est donc l'un des 3 sous-espaces propres précédents ;
- si $\dim F = 3$, $F = \mathbb{R}^3$;
- Enfin, si $\dim F = 2$, on a vu que $F = \bigoplus_{i=0}^{2} F \cap E_i(f)$, donc $F = E_i(f) \oplus E_j(f)$ avec $i \neq j$; cela donne donc 3 plans stables.

Pour info, voici ci-dessous un extrait du rapport du concours :

La première partie de ce problème étudiait un cas particulier dans $\mathbb{R}^4$ où l'on trouvait un polynôme annulateur d'un endomorphisme (défini par sa matrice dans la base canonique) en étudiant les itérées des deux premiers vecteurs de la base. Si l'on omet les (très nombreux, presque un tiers) candidats qui élèvent des vecteurs au carré ou calculent des déterminants rectangulaires, le début de cette partie a plutôt été bien réussi : calcul de l'image d'un vecteur, relation linéaire entre vecteurs, base ... L'écriture de la matrice de l'application linéaire dans une base autre que la base canonique a en revanche déjà posé beaucoup de problèmes à la majorité des candidats.

Insistons sur le fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base et qu'un corollaire de cette propriété est que, si une relation linéaire est vérifiée par les vecteurs de la base, elle l'est pour tous les vecteurs de l'espace. Cette propriété importante devait être utilisée plusieurs fois dans ce problème et semble totalement ignorée par la plupart des candidats.

Les seconde et troisième parties du problème étudiaient dans un cadre abstrait l'es- pace vectoriel engendré par un vecteur **fixé** et ses itérés successifs par un endomorphisme. Nous ne détaillerons pas ici les différentes questions, car nous arrivons, pour la très grande majorité des candidats dans le non-sens le plus total, art qui peut être très drôle lorsqu'il est pratiqué par un anglais mais qui ici est plutôt désolant. Ainsi, le raisonnement mathématique se résume pour beaucoup à prendre un argument au hasard parmi une liste prédéfinie, mettre « donc », et conclure que la propriété demandée est vraie. Il n'est pas rare de voir certains candidats traiter l'intégralité de la partie II sans que le correcteur puisse trouver quelques points à donner. De grâce, privilégiez la qualité à la quantité !

Pour être plus constructif, voici quelques erreurs qui sont revenues très régulièrement et qui pourraien têtre facilement gommées par un étudiant qui prendrait un peu de temps pour la réflexion :

-- Faites attention aux objets que vous manipulez ! Mettre des ensembles égaux à des vecteurs ou des fonctions incluses dans des ensembles dès les premières questions ne met pas le correcteur dans des dispositions particulièrement tolérantes.

-- Il y a eu énormément de confusion entre les raisonnements à x fixé ou pour tout x.

-- Dans le même ordre d'idée, lorsqu'un vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire d'une famille de vecteurs, on ne peut pas choisir cette combinaison linéaire (elle est imposée par le vecteur lui-même). En particulier, ces coefficients ne sont pas miraculeusement ceux que l'on a obtenu dans un autre contexte à la question précédente, un argument supplémentaire est nécessaire pour une telle conclusion.

-- La notion d'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs n'est pas maîtrisée.

Fort heureusement, ce problème se terminait par un exercice de diagonalisation d'une matrice 3×3, ce que pratiquement tous les candidats maîtrisent. Cela semble être la seule compétence acquise en algèbre linéaire pour beaucoup d'entre eux.
