DS n°1 (le 16/09/2017)

EXERCICE

On notera $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On confondra polynôme et fonction polynôme. On notera $\deg(P(X))$ le degré d' un polynôme $P(X)$.

I. Définition d'une application.

Soit n un entier naturel non nul fixé pour toute la suite du problème . Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)+XR(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a donc $P(X^2) = Q(X)T(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$).

On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

3) Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = X^2$.

a) Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

II. Etude d'un cas particulier.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3+X^2+a$.

4) Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

5) Calculer le déterminant de f_3.

6) Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

7) Dans cette question $a = -1$.

a) Donner une base de ker f_3 , le noyau de f_3.

b) Donner une base de Im f_3 , l'image de f_3.

c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

III Etude du noyau.

8) Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que : $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.

9) Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que : $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.

10) En déduire que si $P(X)$ est un élément du noyau de f alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

11) Déduire de la question **10** que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que deg $(P(X))+k \leq n$ alors $X^k P(X)$ appartient au noyau de f.

12) On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a) Montrer que I possède un plus petit élément d.

b) Soit $P_0(X)$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $P_1(X)$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Montrer qu'il existe c de $\mathbb{C}$ tel que $P_1(X) = cP_0(X)$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(X)$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $S(X)$ de degré inférieur ou égal à n-d tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

13) On suppose dans cette question que $T(X) = X^3+X^2-1$. Donner le noyau de f.

PROBLEME

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout entier naturel k, on pose $\Delta^k = \mathrm{Id}$ si $k = 0$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k fois) si $k \geq 1$.
Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

■ Partie I : Etude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall\, n \geq 1, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\dots(X-n+1) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

1°) *La famille (P_n) forme une base de $\mathbb{R}[X]$*

a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

c) Etablir, pour tout entier naturel k, que $P_n(k)$ et que $P_n(-k)$ sont des entiers.

d) En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, que les coefficients de P dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des nombres entiers si et seulement si on a : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$.

2°) *Etude de l'endomorphisme Δ*

a) Etablir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer ΔP_0, puis ΔP_{n+1} en fonction de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) On considère un polynôme non nul P de degré d.
Préciser le degré du polynôme ΔP et donner $\Delta^{d+1} P$.

d) Préciser le noyau de Δ, puis étudier s'il est injectif et s'il est surjectif.

3°) *Expression d'un polynôme dans la base (P_n) de $\mathbb{R}[X]$*

a) Calculer $\Delta^k P_n$ et en déduire que $\Delta^k P_n(0) = \delta_{k,n}$ où $\delta_{k,n} = 1$ si $k = n$, $\delta_{k,n} = 0$ si $k \neq n$.

b) En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule suivante :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0)\, P_n(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n P(0)}{n!} X(X-1)\dots(X-n+1).$$

4°) *Etude de l'endomorphisme Δ_d induit par Δ sur $\mathbb{R}_d[X]$*

On désigne par $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq d$ (où $d \geq 1$) et on désigne par Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$ induit par Δ, c'est à dire par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_d[X], \quad \Delta_d P(X) = P(X+1) - P(X).$$