CORRIGÉ DU DS°1

EXERCICE :

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et λ_1 un élément de $\mathbb{C}$.
On a :
$$P_1(X^2) = Q_1(X)T(X) + R_1(X) \text{ avec } \deg(R_1) < n \text{ et } f(P_1) = Q_1(X) + XR_1(X)$$
et :
$$P_2(X^2) = Q_2(X)T(X) + R_2(X) \text{ avec } \deg(R_2) < n \text{ et } f(P_2) = Q_2(X) + XR_2(X)\,.$$
Par suite :
$$(\lambda_1 P_1 + P_2)(X^2) = (\lambda_1 Q_1(X) + Q_2(X))T(X) + \lambda_1 R_1(X) + R_2(X)\,,$$
avec $\deg(\lambda_1 R_1 + R_2) < n$.
Ceci permet d'affirmer que $\lambda_1 Q_1(X) + Q_2(X)$ et $\lambda_1 R_1(X) + R_2(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $(\lambda_1 P_1 + P_2)(X^2)$ par $T(X)$.
Par conséquent on peut écrire que :
$$f(\lambda_1 P_1 + P_2) = \lambda_1 Q_1(X) + Q_2(X) + X(\lambda_1 R_1(X) + R_2(X))$$
soit encore :
$$f(\lambda_1 P_1 + P_2)) = \lambda_1(Q_1(X) + XR_1(X)) + (Q_2(X) + XR_2(X)) = \lambda_1 f(P_1) + f(P_2)\,,$$
ce qui traduit la linéarité de f.

2. – f_n va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$: en effet, si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $\deg(P(X^2)) \leqslant 2n$ donc $\deg(Q(X)) \leqslant n$ puisque T est de degré n, et $\deg(XR(X)) \leqslant n$.
Donc $\deg(f_n(P)) = \deg(Q(X) + XR(X)) \leqslant n$.
– f_n est linéaire puisque f l'est. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. a) Pour déterminer la matrice de f_2 dans la base canonique, il faut déterminer les images par f_2 des vecteurs de cette base.
On a :
$$1 = 0 \times X^2 + 1 \text{ donc } f_2(1) = 0 + X \times 1 = X\,;$$
$$X^2 = 1 \times X^2 + 0 \text{ donc } f_2(X) = 1 + X \times 0 = 1\,;$$
$$X^4 = X^2 \times X^2 + 0 \text{ donc } f_2(X^2) = X^2 + X \times 0 = X^2\,.$$
La matrice A cherchée est donc : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que A est inversible avec $A^{-1} = A$, donc f_2 est bijectif et $f_2^{-1} = f_2$: c'est une symétrie.
f_2 est la symétrie par rapport au plan $\mathrm{Vect}(1 + X, X^2)$, puisque les deux polynômes $1 + X$ et X^2 sont invariants par f_2 , parallèlement à $\mathrm{Vect}(1 - X)$, puisque le polynôme $1 - X$ est transformé en son opposé.

4. On a :
$$1 = 0 \times (X^3 + X^2 + a) + 1 \text{ donc } f_3(1) = 0 + X \times 1 = X\,;$$
$$X^2 = 0 \times (X^3 + X^2 + a) + X^2 \text{ donc } f_3(1) = 0 + X \times X^2 = X^3\,;$$
$$X^4 = (X - 1) \times (X^3 + X^2 + a) + (X^2 - aX + a) \text{ donc } f_3(X^2) = X - 1 + X \times (X^2 - aX + a) \text{ soit :}$$
$$f_3(X^2) = -1 + (1 + a)X - aX^2 + X^3\,;$$
$$X^6 = (X^3 - X^2 + X - (a + 1)) \times (X^3 + X^2 + a) + (2a + 1)X^2 - aX + a^2 + a$$
$$\text{Donc } f_3(X^3) = X^3 - X^2 + X - (a + 1) + X \times ((2a + 1)X^2 - aX + a^2 + a) \text{ puis enfin :}$$
$$f_3(X^3) = -(a + 1) + (a^2 + a + 1)X - (a + 1)X^2 + (2a + 2)X^3.$$
La matrice B est donc : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -(a+1) \\ 1 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & 0 & -a & -(a+1) \\ 0 & 1 & 1 & 2(a+1) \end{pmatrix}$.

5. Le déterminant de f_3 est celui de B.
En développant selon la 1ère colonne :

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -(a+1) \\ 1 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \\ 0 & 0 & -a & -(a+1) \\ 0 & 1 & 1 & 2(a+1) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -(a+1) \\ 0 & -a & -(a+1) \\ 1 & 1 & 2(a+1) \end{vmatrix}$$

puis en redéveloppant le déterminant obtenu selon la 1ère colonne :

$$\det B = -\begin{vmatrix} -1 & -(a+1) \\ -a & -(a+1) \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}.$$

Conclusion : $\det(f_3) = (a+1)(a-1)$.

6. f_3 n'est pas injective lorsque $\det f_3 = 0$ c'est-à-dire pour $a = 1$ et $a = -1$.

7. Dans cette question, on prend $a = -1$.

a) La matrice de f_3 dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est : $B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les première et quatrième colonne sont identiques ; il est clair que les trois premières colonnes forment une famille libre, le rang de f_3 est donc 3 et $\operatorname{Ker} f_3$ est donc de dimension 1 grâce au théorème du rang.
Puisque la première colonne est égale à la quatrième, on a :

$$f_3(1 - X^3) = f_3(1) - f_3(X^3) = 0.$$

Par suite une base de $\operatorname{Ker} f_3$ est $\{1 - X^3\}$.

b) D'après ce qui a été dit plus haut, $\operatorname{Im} f_3$ est engendrée par les images des trois premiers vecteurs de la base canonique, donc ne base de $\operatorname{Im}(f_3)$ est : $(X,\ X^3, -1 + X^2 + X^3)$.

c) $\operatorname{Ker} f_3$ et $\operatorname{Im}(f_3)$ seront supplémentaires si et seulement si la réunion de leur deux bases trouvées ci-dessus forme une base de $\mathbb{C}_3[X]$. Vérifions qu'effectivement $\det(1 - X^3, X, X^3, -1 + X^2 + X^3) \neq 0$.

Ce déterminant vaut : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$\operatorname{Ker}(f_3)$ et $\operatorname{Im}(f_3)$ sont supplémentaires.

8. Soit P un polynôme non nul de degré p tel que $2p < n$.
On a alors $\deg(P(X^2)) < n$ et par suite la division euclidienne de $P(X^2)$ par T s'écrit : $P(X^2) = 0 \times T(X) + P(X^2)$.
Donc $f(P) = XP(X^2) \neq 0$.

9. On a par définition : $P(X^2) = Q(X)T(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < n$ et $f(P) = Q(X) + XR(X)$.
La condition $f(P) = 0$ donne $Q(X) = -XR(X)$ et par suite on peut écrire :

$$P(X^2) = R(X)(1 - XT(X)) \text{ avec } \deg(R(X)) < n.$$

Réciproquement, si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$, alors la relation $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X)$ avec $\deg(R(X)) < n$ est exactement la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$ et par suite $f(P) = -XR(X) + XR(X) = 0$, soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$.

Cela démontre l'équivalence demandée.

10. D'après la question précédente, si $P \in \operatorname{Ker}(f)$ on a :

$$P(X^2) = R(X)(1 - XT(X)) \text{ avec } \deg(R(X)) < n,$$

ce qui implique que : $2\deg(P) < n + n + 1$ soit $\deg(P) < \dfrac{2n+1}{2}$, donc $\deg P \leqslant n$, soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

11. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$; alors $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et il existe R tel que $\deg(R) < n$ et $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$.

Soit k tel que $\deg(P) + k \leqslant n$; alors $X^k P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Montrons qu'il existe R_k tel que $\deg(R_k) < n$ et $X^{2k}P(X^2) = R_k(X)(1 - XT(X))$.

On peut écrire :

$$X^{2k}P(X^2) = X^{2k}R(X)(1 - XT(X)) = R_k(X)(1 - XT(X)) \text{ avec } R_k(X) = X^{2k}R(X).$$

Notons $p = \deg(P)$ et $r = \deg(R)$; on a : $\begin{cases} 2p = n + 1 + r \\ p + k \leqslant n\,. \end{cases}$ d'après lles relations ci-dessus.

On en déduit que $\deg(R_k) = 2k + r \leqslant 2n - 2p + r$ soit $\deg(R_k) \leqslant 2n - n - 1 - r + r = n - 1$ et donc $\deg(R_k) < n$.

$X^k P$ vérifie ainsi la CNS de la question 9, donc $X^k P \in \mathrm{Ker}(f)$.

12. On suppose ici $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$. Soit $I = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists P \in \mathrm{Ker}(f) \text{ avec } \deg(P) = k\}$.

a) I est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$, donc il admet un plus petit élément d.

b) Soit $P_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $P_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ tel s que $\deg(P_0) = \deg(P_1) = d$.

Notons $P_0 = a_d X^d + \cdots + a_0$ avec $a_d \neq 0$ et $P_1 = b_d X^d + \cdots + b_0$ avec $b_d \neq 0$.

Alors $P_1 - \dfrac{b_d}{a_d}P_0$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ (sous-espace vectoriel) et si ce polynôme n'était pas le polynôme nul, il aurait un degré strictement plus petit que d, ce qui est en contradiction avec la définition de d.

Conclusion : $P_1 = cP_0$ avec $c \in \mathbb{C}$.

c) D'après la question 11, pour tout k tel que $k \leqslant n - d, X^k P_0 \in \mathrm{Ker}(f)$; par suite (stabilité par combinaisons linéaires car $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel), pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $n - d$,

$$SP_0 \in \mathrm{Ker}(f).$$

Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$; alors $\deg(P) \leqslant n$ d'après la question 10.

On écrit la division euclidienne de P par P_0 :

$$P = SP_0 + V \text{ avec } \deg(V) < d \quad \text{et} \quad \deg(S) \leqslant n - d.$$

Si V était non nul, on aurait $P - SP_0(X) = V$ qui appartiendrait à $\mathrm{Ker}(f)$, ce qui contredit la définition de d.

Conclusion : $V = 0$ puis $P = SP_0$ avec $S(X) \in \mathbb{C}_{n-p}[X]$.

13. On suppose dans cette question que $T(X) = X^3 + X^2 - 1$. Ceci correspond au cas étudié dans la question 7.

La question posée est curieuse, puisque la recherche du noyau de f (ici f_3) a déjà été faite dans cette question : on a vu que $\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1)$. Ici, $d = n = 3$. Que dire de plus ?