DS N°2 (le 07/10/2017)

SUJET n°1 (3 exercices)

EXERCICE 1 (extrait de CCP MP 2011)

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ le commutant de la matrice A.

1. Démontrer que, pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un espace vectoriel.

2. Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On précisera une matrice de passage à coefficients entiers, que l'on notera P, et on calculera P^{-1}.

3. Déterminer le commutant $C(T)$ de la matrice T. Déterminer sa dimension.

4. Démontrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire pour la dimension de $C(A)$?

5. a) Démontrer que la famille $\{I_3, A, A^2\}$ est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Démontrer alors que $C(A) = \text{Vect}\left(\{I_3, A, A^2\}\right)$.

c) Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

EXERCICE 2 (extrait de E3A PSI 2017, Maths 1)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ sa base canonique.
Soient $a_1, \ldots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i.
Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les coordonnées d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.
Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

a) Calculer les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.

b) En utilisant la question 2, déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2.$$

4. **On revient au cas général**.
   a) Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2)
   b) Établir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.
   c) Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.
   d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.
5. **Dans cette question,** on suppose que $n \geqslant 4$ et que $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   Soit u l'endomorphisme de E défini par :
   $$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X).$$
   a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?
   b) Montrer que u est une projection que l'on caractérisera.

EXERCICE 3 (extrait de E3A PSI 2017, Maths 2)

Dans tout le problème, on se donne un entier naturel $n \geqslant 2$ un entier et on note :
- $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- O_n la matrice nulle de $\mathcal{E}$ et I_n la matrice identité ;
- ${}^tA$ la transposée d'un élément de $\mathcal{E}$;
- Pour tout couple $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1 ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{E}$;
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices **nilpotentes** de $\mathcal{E}$, c'est à dire des $A \in \mathcal{E}$ telles qu'il existe un entier p avec $A^p = O_n$.

Questions de cours

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$? En donner sans justification une base.
2. Soit $(i, j, k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$. Calculer le produit des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. (On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$).

I. Propriétés élémentaires

Soit A une matrice de $\mathcal{N}$

1. La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier votre réponse.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est inclus dans $\mathcal{N}$.
3. Vérifier que ${}^tA \in \mathcal{N}$.
4. Montrer que si M est semblable à A, alors $M \in \mathcal{N}$.
5. a) Soit p le plus petit entier naturel tel que $A^p = O_n$, et soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{p-1}X_0 \neq 0$. Montrer que la famille $\{X_0, AX_0, \ldots, A^{p-1}X_0\}$ est libre. Que peut-on en déduire pour p ?
   b) En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{E}$ soit nilpotente est que $M^n = O_n$.

   On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.

6. Soient $B, C \in \mathcal{E}$.

a) On suppose que $BC \in \mathcal{N}$. Prouver alors que $CB \in \mathcal{N}$.

b) Ici, on suppose de plus que $B \in \mathcal{N}$ et $AB = BA$.
Montrer que $AB \in \mathcal{N}$ et que $A + B \in \mathcal{N}$.

7. Soient $A \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.
Montrer que M est inversible et calculer son inverse à l'aide des puissances de la matrice A.
(On pourra utiliser une suite géométrique.)

II. Exemples

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathcal{E}$.

1. Dans cette question, on prend $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geqslant j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$,

c'est-à-dire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer, en détaillant, que la matrice M appartient à $\mathcal{N}$.

b) On pose $S = M + {}^tM$. Calculer $\det(S)$. A-t-on $S \in \mathcal{N}$?
Montrer que $S^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, S)$.

c) $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

2. Dans cette question on prend $n = 2$.

a) On suppose que M est de rang 1.
Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit nilpotente.

b) Déterminer une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

c) Déterminer plus généralement l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.