CORRIGÉ DU DS°2

SUJET n°1 (3 exercices)

EXERCICE 1 (extrait de CCP MP 2011)

1. – $C(A)$ est une partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui contient la matrice nulle (car $O_n \times A = A \times O_n = O_n$!), donc est non vide.
– Si M et N sont dans $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$A(\lambda M + N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M + \lambda N)A\,,$$

donc $M + \lambda N$ appartient à $C(A)$.
Cela prouve que $C(A)$ est un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. A est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ d'un certain endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
Dire que A et T sont semblables signifie que T est la matrice de u dans une autre base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
Cela revient donc à chercher des vecteurs ε_i, linéairement indépendants, tels que :

$$u(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1 \quad , \quad u(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3\,.$$

Place aux calculs :
– En notant $\varepsilon_1 = (x, y, z)$:

$$u(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1 \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ y = z \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z\,. \end{cases}$$

On peut donc choisir $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$.
– En notant $\varepsilon_2 = (x, y, z)$:

$$u(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de ce système est une droite de $\mathbb{R}^3$ (intersection de deux plans distincts). On peut par exemple choisir $\varepsilon_2 = (4, 3, 4)$.
– Enfin, en notant $\varepsilon_3 = (x, y, z)$:

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 4 + 2x \\ 6y - 3z = 3 + 2y \\ -x + 4y = 4 + 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = 3 \end{cases}.$$

On peut alors choisir $\varepsilon_3 = (-2, 0, -1)$.
La famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien libre, et si l'on note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ on a :

$$T = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$Y = PX \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = x' \\ x + 3y = y' \\ x + 4y - z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = y' & (L_2) \\ y - 2z = x' - y' & (L_1 - L_2) \\ z = z' - x' & (L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3x' + 4y' - 6z' \\ y = -x' - y' + 2z' \\ z = -x' + z' \end{cases} \iff X = P^{-1}Y$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ appartient à $C(T)$ si et seulement si $MT = TM$ soit

$$MT = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3a' & 2b' & b'+2c' \\ 3a'' & 2b'' & b''+2c''" \end{pmatrix} = TM = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2a'+a'' & 2b'+b'' & 2c'+c'' \\ 2a'' & 2b'' & 2c'' \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à : $b = c = a' = a'' = b'' = 0$ et $b' = c''$. Les matrices M qui conviennent sont donc celles de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & b' \end{pmatrix} = aE_{11} + b'(E_{22} + E_{33}) + c'E_{23}\,.$$

Il s'agit donc du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les 3 matrices E_{11}, $E_{22} + E_{33}$ et E_{23} ; cest trois matrices étant linéairement indépendantes, la dimension de $C(T)$ est égale à 3.

4. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est facilement linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Cet endomorphisme est injectif puisque $P^{-1}MP = O_3 \Rightarrow M = O_3$; par suite c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (espace vectoriel de dimension finie).

L'image de $C(A)$ par cet automorphisme n'est autre que $C(T)$ puisque :

$M \in C(A) \iff AM = MA \iff PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \iff T(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)T \iff P^{-1}MP \in C(T)$.

Par conséquent, $\dim C(A) = \dim C(T) = 3$.

5. a) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 20 & -14 \\ 3 & 24 & -18 \\ -1 & 20 & -10 \end{pmatrix}$. Il est alors facile de montrer que :

$$aI_2 + bA + cA^2 = O_3 \Longrightarrow a = b = c = 0\,,$$

c'est-à-dire que la famille $\left\{I_3, A, A^2\right\}$ est libre.

b) Évidemment, les matrices I_3, A et A^2 commutent avec A ; elles appartiennent donc à $C(A)$.
Comme elles forment un système libre dans un espace vectoriel de dimension 3, elles en forment une base.

c) Ce résultat ne subsiste pas pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si l'on prend par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

de sorte que $A^2 = O_3$, alors $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2, alors qu'un calcul similaire à celui de la question **3.** montre que le commutant de A est un sous-espace vectoriel de dimension 6.

EXERCICE 2 (extrait de E3A PSI 2017, Maths 1)

1. Soit l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$.

– *Linéarité.*
D'après le cours, les applications $P \mapsto P(a_i)$ sont des formes linéaires. Ainsi T est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}^n$.

– *Injectivité.*
Soit $P \in \mathrm{Ker}(T)$. On a $T(P) = 0$ donc $(P(a_1), \ldots, P(a_n)) = (0, 0, \ldots, 0)$ et P s'annule en au moins n réels distincts. Puisque P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, c'est le polynôme nul.
On en déduit $\mathrm{Ker}(T) = \{0_E\}$, T est injective.

– *Bijectivité.*
On a $\dim(E) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Comme T est une application injective de E vers $\mathbb{R}^n$, par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, T est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2. – T est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$ donc sa bijection réciproque, T^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers E. Or $\mathcal{B}'$ est l'image de $\mathcal{E}$ par T^{-1}. Comme l'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée , on en déduit que $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de E.

– Remarquons d'abord que, par définition, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$T(L_i) = \big(L_i(a_1), \dots, L_i(a_n)\big) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{(avec le 1 à la } i\text{-ème place)}$$

ce qui signifie que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

Soit alors $P \in E$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.

On a $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k$. En évaluant cette relation en a_j, compte tenu du calcul précédent, on obtient $P(a_j) = \lambda_j$ ce qui donne la coordonnée sur L_j. Ainsi, $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k)\, L_k$.

3. a) Comme les L_k sont de degré $\leqslant 2$, s'annulent en a_j pour $j \neq k$ et valent 1 en a_k, on trouve :

$$L_1 = \frac{(X-1)(X-2)}{2} = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \,,\ L_2 = -X(2-X) = 0 + 2X - X^2 \ \text{ et } \ L_3 = \frac{X(X-1)}{2} = 0 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \,.$$

On en déduit la matrice M de (L_1, L_2, L_3) dans $\big(1, X, X^2\big)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Dire que $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ équivaut à dire que les coordonnes de P dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sont $\big(P(0), P(1), P(2)\big)$, c'est-à-dire sont les mêmes que ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, L_2)$.

Or si $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées de P dans $\mathscr{B}$ et $V' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ celles dans $\mathscr{B}'$, M étant la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, les <u>formules du cours</u> donnent la relation $V = MV'$.

Les polynômes cherchés sont donc ceux dont les coordonnées vérifient la relation $V = MV$ soit :

$$\begin{cases} a = a \\ b = -\dfrac{3}{2}a + 2b - \dfrac{1}{2}c \\ c = \dfrac{1}{2}a - b + \dfrac{1}{2}c \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ a - 2b - c = 0 \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de ce système est une droite vectorielle, de base $(1, 1, -1)$ et par conséquent, les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ sont les polynômes : $\lambda\left(1 + X - X^2\right)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

4. a) M est la matrice de passage d'une base vers une autre donc M est inversible.

M^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$; ses colonnes sont donc formées des coordonnées dans $\mathcal{B}'$ des vecteurs X^j de la base $\mathcal{B}$; or d'après la question **2.** , les coordonnées de X^j dans $\mathcal{B}'$ sont $(a_1^j, \dots, a_n^j)$ donc :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice de Vandermonde...

b) Les coordonnées du polynôme constant égal à 1 dans la base $\mathcal{B}'$ sont toutes égales à 1 (question **2.**) ; cela signifie que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

c) Par définition de M, on a pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $L_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} X^{i-1}$. Ainsi :

$$1 = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \right) X^{i-1}.$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, la somme $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ représente le coefficient en X^{i-1} du polynôme constant égal à 1. Donc :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1 \quad \text{et, si } i \in [\![2\,;n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0.$$

d) On reprend l'expression $L_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} X^{i-1}$.

On a alors, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = L_j(1) = L_j(a_1)$ (car ici $a_1 = 1$). Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,1} = 1 \quad \text{et, si } j \in [\![2\,;n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0.$$

5. L'énoncé affirme que u est un endomorphisme de E, donc inutile de le vérifier !

a) – *Noyau.*

Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker}(u) \iff P(0) = P(1) = P(2) = 0$ car (L_1, L_2, L_3) est libre. Ainsi $\mathrm{Ker}\, u$ est formé des multiples du polynôme $X(X-1)(X-2)$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ soit encore :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{X(X-1)(X-2)Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X]\},$$

ce qui implique $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathbb{R}_{n-4}[X] = n-3$.

– *Image.*

D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension $\dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - (n-3) = 3$. Or on a clairement $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ qui est de dimension 3 car (L_1, L_2, L_3) est libre. Ainsi $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \mathbb{R}_2[X]$.

– *Supplémentaires.*

Soit $P \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Puisque P est combinaison linéaire de L_1, L_2, L_3, on a $\deg(P) \leqslant 2$. Mais P est aussi multiple de $X(X-1)(X-2)$, donc $P = 0_E$: $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe. Et puisque la somme de leurs dimensions est $\dim(E)$ par le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E.

b) Si $Q = u(P) = P(0)L_1 + P(1)L_2 + P(2)L_3$, on a $Q(0) = P(0)$, $Q(1) = P(1)$ et $Q(2) = P(2)$ (puisque $L_i(j) = \delta_{ij}$). On en déduit $u(Q) = Q$ c'est-à-dire $u^2 = u$.
u est donc un projecteur ; d'après le cours, c'est la projection sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$.

EXERCICE 3 (extrait de E3A PSI 2017, Maths 2)

Questions de cours

1. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension n^2 ; une base en est la famille $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2. Notons $A = E_{i,j} \times E_{k,\ell}$. Alors, pour tout $(p,q) \in [\![1\,;n]\!]^2$:

$$A_{p,q} = \sum_{r=1}^{n} (E_{i,j})_{p,r} (E_{k,\ell})_{r,q} = \sum_{r=1}^{n} \delta_{i,p}\delta_{j,r}\delta_{k,r}\delta_{\ell,q} = \delta_{i,p}\delta_{\ell,q} \left(\sum_{r=1}^{n} \delta_{j,r}\delta_{k,r} \right) = \delta_{i,p}\delta_{\ell,q}\delta_{k,j} = \delta_{k,j} (E_{i,\ell})_{p,q}$$

donc $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

I. Propriétés élémentaires

1. Puisqu'il existe p tel que $A^p = O_n$,on a $\det(A^p) = (\det A)^p = 0$ donc $\det A = 0$ et A n'est pas inversible.

2. Si $A^p = 0$ alors pour tout scalaire λ, $(\lambda A)^p = O_,$ donc $\lambda A \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathcal{N}$.

3. $\left({}^t A\right)^p = {}^t A^p = O_n$ donc ${}^t A \in \mathcal{N}$.

4. Si $M = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $M^p = P^{-1}A^pP = O_n$ donc $M \in \mathcal{N}$.

5. a) Si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ sont des scalaires tels que

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 AX_0 + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X_0 = 0$$

alors en multipliant à gauche par A^{p-1}, puisque $A^k = O_n$ dès que $k \geqslant p$ on obtient $\lambda_0 A^{p-1}X_0 = 0$, donc $\lambda_0 = 0$ puisque $A^{p-1}X_0 \neq 0$.
On a donc ensuite :

$$\lambda_1 AX_0 + \cdots + \lambda_{p-1}A^{p-1}X_0 = 0$$

puis en multipliant par A^{p-2} on obtient $\lambda_1 A^{p-1}X_0 = 0$ et $\lambda_1 = 0$ etc...
Finalement, tous les λ_i sont nuls, et la famille $\left\{X_0, AX_0, \ldots, A^{p-1}X_0\right\}$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Son cardinal est donc inférieur à la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $p \leqslant n$.

b)
- si M est nilpotente, soit p le plus petit entier tel que $M^p = O_n$ (il existe!). Alors $p \leqslant n$ d'après la question précédente, donc $M^n = M^pM^{n-p} = O_n$.
- réciproquement, si $M^n = O_n$, M est nilpotente!

On a donc démontré l'équivalence demandée.

6. a) Si BC est nilpotente, alors $(BC)^n = O_n$. Donc $(CB)^{n+1} = C(BC)^nB = O_n$, et ainsi CB est nilpotente.

b)
- si A et B commutent, alors $(AB)^n = A^nB^n$, donc si l'une des deux matrices A ou B est nilpotente, AB l'est aussi.
- D'après la formule du binôme, utilisable pusique A et B commutent :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}A^kB^{2n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}A^kB^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}A^kB^{2n-1-k} \\
&= \underbrace{B^n}_{=O_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}A^kB^{n-1-k}\right) + \underbrace{A^n}_{=O_n}\left(\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}A^{k-n}B^{2n-1-k}\right) \\
&= O_n\,,
\end{aligned}$$

donc $A+B$ est nilpotente.

Rem : les deux résultats ci-dessus peuvent tomber en défaut si les matrices A et B ne commutent pas. Je vous laisse trouver des contre-exemples...

7. On calcule :

$$(I_n + \alpha A)(I_n - \alpha A + (\alpha A)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}(\alpha A)^{n-1}) = I_n + (-1)^{n-1}(\alpha A)^n$$

après télescopage.
Et puisque αA est nilpotente on obtient :

$$(I_n + \alpha A)(I_n - \alpha A + (\alpha A)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}(\alpha A)^{n-1}) = I_n$$

ce qui signifie que la matrice $I_n + \alpha A$ est inversible (à droite, mais l'on a vu en cours que cela suffit), et :

$$(I_n + \alpha A)^{-1} = (I_n - \alpha A + (\alpha A)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}(\alpha A)^{n-1})\,.$$

II. Exemples

1. a) Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Alors par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base on a :

$$u(e_1) = 0\ ,\ u(e_2) = e_1\ ,\ u(e_2) = e_1\ ,\ \dots\ ,\ u(e_n) = e_1 + \dots + e_{n-1}\,.$$

En considérant alors les sous-espaces vectoriels suivants :

$F_0 = \{0\}\,,\ F_1 = \mathrm{Vect}(e_1),\ F_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2),\ \dots,\ F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k),\ \dots,\ F_n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n\,,$

on a, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$: $u(F_k) \subset F_{k-1}$.
On aura donc, pour $k \in [\![2\,;n]\!]$: $u^2(F_k) \subset F_{k-2}$ etc... et finalement $u^n(F_n) \subset F_0$ c'est-à-dire $u^n(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Donc $u^n = 0$ et u est nilpotent.

b) $$\det S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

en ayant additionné toutes les colonnes à la 1ère, ce qui ne change pas le déterminant.
Puis en soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres :

$$\det S = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

La matrice S étant inversible car de déterminant non nul, elle ne peut pas être nilpotente.
En écrivant $S = J - I_n$ où J est la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1, on a $S^2 = J^2 - 2J + I_n$ et, puisque $J^2 = nJ$, on trouve :

$$S^2 = I_n + (n-2)J = I_n + (n-2)(S + I_n) = (n-1)I_n + (n-2)S\,.$$

Cela montre que $S^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, S)$.

c) $\mathcal{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car, par exemple, M et ${}^tM$ sont dans $\mathcal{N}$ mais pas $M + {}^tM$.

2. a) Dire que la matrice M, carrée d'ordre 2, est de rang 1 signifie que ses deux colonnes appartiennent à la même droite vectorielle de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc sont de la forme aU et bU où $U \neq 0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et où a, b sont des réels non tous deux nuls : $M = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha \\ a\beta & b\beta \end{pmatrix}$.
La relation $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$ se vérifie alors sans peine.
Rem : voir une généralisation et une solution plus astucieuse dans la feuille d'exercices n°3....
Si M est nilpotente, puisqu'elle est d'ordre 2, on a nécessairement $M^2 = O_2$ (question **I.5**) donc $\mathrm{tr}(M) = 0$ d'après la relation précédente (M est non nulle car de rang 1).
La réciproque est immédiate. La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc : $\mathrm{tr}(M) = 0$.

b) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient (pas de calcul à faire, utiliser directement le résultat de la question précédente).

c) – La matrice nulle est nilpotente.
– Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de rang 2 elle est inversible donc n'est pas nilpotente.
– Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de rang 1 elle est nilpotente si et seulement si sa trace est nulle.

On peut en conclure que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont exactement celles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 0$.