CORRIGÉ DU DM n°7 (EPITA 2019 MP PC PSI (3 heures))

Il s'agit ici du corrigé officiel fourni par l'EPITA (à part la partie informatique).

Dans toute la résolution de ce problème, α est un réel strictement positif, sauf le temps de la question 7.(a). De plus, nous posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_n(x) = e^{-xn^\alpha}.$$

Partie I : premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-xn} = \left(e^{-x}\right)^n$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-xn}$ est une série géométrique, de raison e^{-x} ; elle converge donc si et seulement si $e^{-x} \in]-1,1[$, si et seulement si $x > 0$.
Ainsi la série de fonctions définissant S_1 converge simplement sur $]0,+\infty[$. Toujours en y reconnaissant une somme de série géométrique, on peut expliciter $S_1(x)$ pour tout $x > 0$:

$$\forall x > 0, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

b) On utilise l'équivalent classique : $e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$. On en déduit :

$$S_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Or : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{x\to 0^+} S_1(x) = +\infty.$$

c) Pour tout $x > 0$, on a :

$$S_1(x) - 1 = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} (S_1(x) - 1) = 0.$$

2. a) Soit $x \leqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-xn^\alpha \geqslant 0$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-xn^\alpha} \geqslant e^0 = 1$. Ainsi $\left(e^{-xn^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ diverge grossièrement.

b) Soit $x > 0$. D'après le théorème des croissances comparées, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-xn^\alpha} = 0$. On en déduit : $e^{-xn^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-xn^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la seconde série est une série de Riemann convergente du fait que $2 > 1$; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge si $x > 0$.

c) Il est démontré dans les deux questions précédentes que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge si $x > 0$ et diverge si $x \leqslant 0$. Ainsi la somme $S_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$ n'est définie que si $x > 0$, et la fonction S_α a pour domaine de définition $]0,+\infty[$.

3. a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, on a : $\left|e^{-xn^\alpha}\right| = e^{-xn^\alpha} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha},$$

où la norme infinie est considérée sur $[\varepsilon, +\infty[$ (nous avons défini f_n en préambule).
Or nous avons démontré dans la question 2.(b) que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge (prendre $x = \varepsilon$).
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$. En particulier, pour tous réels a et b tels que $0 < a \leqslant b$, on a $[a, b] \subseteq [a, +\infty[$, et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$; elle converge donc aussi normalement, et en particulier uniformément, sur $[a, b]$.
Puisque la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ (c'est la composition de l'application polynomiale $x \mapsto -xn^\alpha$, continue sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit que la somme $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$, en tant que composition de l'application $x \mapsto -xn^\alpha$, décroissante sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'application exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$:

$$f_n(y) \leqslant f_n(x),$$

et en sommant de 0 à $+\infty$ on a, pour tous réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$: $S_\alpha(y) \leqslant S_\alpha(x)$. On en déduit que la fonction S_α est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Une fonction monotone admet une limite, éventuellement infinie, en les extrémités de son domaine de définition. On en déduit que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

c) On rappelle le théorème de la double limite :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, et soit a une extrémité (éventuellement infinie) de I. On suppose que :

- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite : $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$ existe et est finie.

Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge, et on a : $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
Or nous avons démontré dans la question 3.(a) que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (prendre $\varepsilon = 1$; en vérité, le choix de ε n'importe pas ici). De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1, \end{cases}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ existe et est finie. On en déduit, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

d) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-xn^\alpha} \geqslant 0$, donc :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lim_{x\to 0} e^{-xn^\alpha} = e^0 = 1$, par continuité de l'exponentielle en 0. On en déduit, quand $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1,$$

l'existence de la limite dans le membre de gauche étant bien établie dans la question 3.(b). Elle est soit finie, soit infinie ; mais si elle est finie, égale à un réel ℓ, alors prendre un entier naturel N tel que : $N+1 > \ell$ (il en existe vu que : $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1) = +\infty$; prendre pour N la partie entière de ℓ par exemple) implique une contradiction dans l'inégalité ci-dessus. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x)$ ne peut qu'être infinie, et $S_\alpha > 0$ donc :

$$\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty.$$

Partie II : étude de la fonction S_2.

4. On note qu'il s'agit, dans cette question, d'effectuer une comparaison entre série et intégrale.

a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. L'application $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $-x < 0$, donc l'application $t \mapsto -xt^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs $\mathbb{R}$. En composant avec l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit la décroissance de l'application $t \mapsto e^{-xt^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Elle l'est donc en particulier sur $[n, n+1]$, et on en déduit :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad e^{-x(n+1)^2} \leqslant e^{-xt^2} \leqslant e^{-xn^2}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[n, n+1]$ (ce qui est possible parce que les applications sont manifestement continues sur ce segment), la croissance de l'intégrale nous donne :

$$\int_n^{n+1} e^{-x(n+1)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xn^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or nous intégrons des fonctions constantes aux extrémités de cet encadrement, sur un segment de longueur 1. On a donc simplement :

$$e^{-x(n+1)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2} \leqslant e^{-xn^2}, \tag{1}$$

d'où le résultat.

b) Soit $x > 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-xn^2}$ converge d'après la question 2.(b), et l'application $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de comparaison entre série et intégrale on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ converge également, et sa somme égale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles.
Donc, en sommant (1) pour n allant de 0 à $+\infty$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}.$$

En faisant le changement d'indice $n \mapsto n+1$ dans la première somme, et en utilisant la relation de Chasles dans la seconde somme, on obtient :

$$S_2(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant S_2(x).$$

On relie l'intégrale en jeu à l'intégrale (de Gauß) de l'énoncé *via* le changement de variable affine : $u = \sqrt{x}t$, licite parce que $t \mapsto \sqrt{x}t$ est de classe C^1 (et : $\mathrm{d}u = \sqrt{x}\,\mathrm{d}t$), et est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On obtient alors :

$$S_2(x) - 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u \leqslant S_2(x).$$

D'après l'énoncé : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. On en déduit :

$$S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x).$$

c) L'inégalité précédente se réinterprète aussi de la façon suivante :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1, \quad \text{et :} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x).$$

Autrement dit :

$$\forall x > 0, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1.$$

On en déduit :

$$\forall x > 0, \quad 1 \leqslant \frac{S_2(x)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}} \leqslant 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement ont clairement pour limite 1 quand $x \to 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{S_2(x)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}} = 1$. Ainsi :

$$S_2(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Or : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = +\infty$. On retrouve donc la limite obtenue à la question 3.(d) :

$$\lim_{x \to 0^+} S_2(x) = +\infty.$$

5. a) Soit $x > 0$. On a $e^{-x \cdot 0^2} = 1$ et $e^{-x \cdot 1^2} = e^{-x}$, donc :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $n^2 \geqslant n$, or $-x < 0$, donc : $-xn^2 \leqslant -xn$. L'exponentielle étant croissante, on en déduit :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn},$$

d'où le résultat pour tout $x > 0$ (l'existence de cette somme fut établie en question 1.(a)).

b) Soit $x > 0$. Nous avons calculé la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}$ dans la question 1.(a). En l'utilisant, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - (1 + e^{-x}) = \frac{1 - (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - (1 - e^{-2x})}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}.$$

On en déduit, suivant l'inégalité de la question précédente :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant e^x \left(S_2(x) - (1 + e^{-x}) \right) \leqslant \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Nous avons déjà calculé la limite de la quantité du membre de droite quand $x \to +\infty$, dans la question 1.(c) : elle égale 0. D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \left(S_2(x) - (1 + e^{-x}) \right) = 0$.

On en déduit :

$$S_2(x) - (1 + e^{-x}) = \underset{x \to +\infty}{o} \left(e^{-x} \right),$$

ce qu'on réécrit : $S_2(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o} (e^{-x})$.

De cela on déduit immédiatement, par définition d'un équivalent :

$$S_2(x) - 1 = e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o} \left(e^{-x} \right) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

6. a) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On reprend la première inégalité de la question 4.(a), en sommant n de N à $+\infty$ (nous avons déjà justifié que c'est possible dans la question 4.(b)), et on obtient :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_N^{+\infty} e^{-xt^2} \, dt.$$

Il suffit de faire le changement d'indice de sommation $n \mapsto n + 1$ dans la somme pour obtenir l'inégalité voulue :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \int_N^{+\infty} e^{-xt^2} \, dt.$$

b) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On a, d'après la question précédente :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Pour estimer cette intégrale nous suivons l'indication de l'énoncé en faisant un changement de variable. Le passage de e^{-xt^2} à e^{-u} suggère le changement de variable : $u = xt^2$.
L'application $t \mapsto xt^2$ est de classe C^1 sur $[N, +\infty[$, et strictement croissante de $[N, +\infty[$ dans $[xN^2, +\infty[$. Le changement de variable : $u = xt^2$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ est donc licite (on a : $\mathrm{d}u = 2xt\,\mathrm{d}t$). Cette intégrale converge d'après la question 4.(b), et on a :

$$\int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\frac{2xt\,\mathrm{d}t}{2xt} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_N^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{\sqrt{xt^2}}(2xt\,\mathrm{d}t),$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge d'après la formule du changement de variable, et :

$$\int_N^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

Reprenant l'inégalité (2), on en déduit :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

Il reste à majorer cette dernière intégrale. On saurait l'intégrer sans dommage sans la présence du quotient par $\sqrt{u}$. On y remédie en majorant $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ par une constante : pour tout $u \geqslant xN^2$ on a $\sqrt{u} \geqslant \sqrt{xN^2} = N\sqrt{x}$, donc :

$$\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{N\sqrt{x}}\int_{xN^2}^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{N\sqrt{x}}\left[-e^{-u}\right]_{xN^2}^{+\infty} = \frac{e^{-xN^2}}{N\sqrt{x}}.$$

On conclut :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{N\sqrt{x}} \times \frac{e^{-xN^2}}{N\sqrt{x}} = \frac{e^{-xN^2}}{2Nx},$$

d'où le résultat pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

c) Soit $x > 0$. Si, pour $\varepsilon > 0$, on a : $\dfrac{e^{-xN^2}}{2Nx} < \varepsilon$, alors :

$$0 \leqslant S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} < \varepsilon,$$

et dans ce cas la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2}$ donne une valeur approchée de $S_2(x)$ à ε près.

Le programme Python qui suit est élémentaire.

```
from math import exp

n = 0
u_n = 1 # représente exp(-xn^2)
S = 0 # sommes partielles
eps = 1e-7
x = 1

erreur = 1
while erreur > eps:
    S += u_n
    n += 1
```

```
    u_n = exp(-x*n*n)
    erreur = u_n/(2*n*x)

print('S(',x,') = ',S,'après',n,'itérations.')

# affiche : S( 1 ) =  1.3863184898642633 après 4 itérations.
```

Partie III : étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$.

7. On note que Γ est la fonction Γ d'Euler.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$: les seuls problèmes éventuels d'intégrabilité sont au voisinage de 0 et de $+\infty$. La fonction étant positive, on peut procéder par relation de comparaison.

Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$. La convergence équivaut ici à l'intégrabilité, toujours par positivité de l'intégrande. On a :

$$e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u\to 0}{\sim} u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}.$$

L'application $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-\alpha}}$ est une fonction de Riemann : elle est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-\alpha < 1$, si et seulement si $\alpha > 0$. On en déduit, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$. On a, d'après le théorème des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^2 \cdot u^{\alpha-1}e^{-u} = 0$. On en déduit :

$$e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Or la fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ l'est également d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

En conclusion : l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ convergent. D'après l'étude qui précède, leur convergence simultanément est assurée si et seulement si $\alpha > 0$.

On en déduit que $\Gamma(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

b) Soient a, et b des réels tels que $0 < a \leqslant b$. On intègre par parties sur le segment $[a,b]$: l'application $u \mapsto e^{-u}$ est continue sur $[a,b]$ et l'application $u \mapsto u^\alpha$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\int_a^b e^{-u}u^\alpha\,\mathrm{d}u = \left[-e^{-u}u^\alpha\right]_a^b - \int_a^b (-e^{-u})\alpha u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = -e^{-b}b^\alpha + e^{-a}a^\alpha + \alpha\int_a^b e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u.$$

Or : $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-b}b^\alpha = 0$ d'après le théorème des croissances comparées, et, du fait que $\alpha > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{a\to 0} e^{-a}a^\alpha = 1 \times 0 = 0$. On en déduit, quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}u^\alpha\,\mathrm{d}u = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

On a immédiatement : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = 1$. Voyons comment, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on en déduit l'égalité : $\Gamma(n+1) = n!$. Si $n = 0$, cela vient d'être établi, vu que $0! = 1$ et $\Gamma(1) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\Gamma(n+1) = n!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus : $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$, donc l'égalité voulue est héréditaire. Nous l'avons initialisée, donc par principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

c) Soit $x > 0$. On a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la question 6.(b), *mutatis mutandis*, le changement de variable : $u = xt^\alpha$ est licite (et on a : $\mathrm{d}u = x\alpha t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$), et nous permet d'en déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} t^{1-\alpha}(x\alpha t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t) = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$; or cette intégrale est, à une constante multiplicative près, l'intégrale $I(\alpha)$; ceci démontre donc sa convergence, et on a de plus :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} I(\alpha).$$

Notons qu'on retrouve l'égalité démontrée (avec $\alpha = 2$ et $N = 0$) dans la question 6.(b).

8. a) Soit $x > 0$. On refait une comparaison entre série et intégrale, comme à la question 4. L'application $t \mapsto e^{-xt^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ par un raisonnement analogue. En reprenant tout ce qu'on a établi, *mutatis mutandis*, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha},$$

c'est-à-dire :

$$S_\alpha(x) - 1 \leqslant I(\alpha) \leqslant S_\alpha(x).$$

On en déduit : $S_\alpha(x) \leqslant I(\alpha) + 1$, et de plus $I(\alpha) \leqslant S_\alpha(x)$ donc cet encadrement peut également s'écrire :

$$I(\alpha) \leqslant S_\alpha(x) \leqslant I(\alpha) + 1.$$

Or, d'après la question précédente : $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ (on peut effectuer la division car $\alpha > 0$ et $x > 0$ par hypothèse). On en déduit, en soustrayant $I(\alpha)$ de chaque membre de l'encadrement :

$$0 \leqslant S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leqslant 1,$$

d'où le résultat attendu.

b) On a $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$: il s'agit de l'intégrale sur $]0, +\infty[$ d'une fonction CONTINUE, positive et non identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a, partant de l'encadrement la question précédente où l'on divise tout par $\frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$, puis ajoute 1 :

$$1 \leqslant \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_\alpha(x) \leqslant \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 1,$$

or $\frac{1}{\alpha} > 0$, donc : $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\alpha}} = 0$. Il est alors immédiat que les deux extrémités de l'encadrement ci-dessus ont pour limite 1 quand $x \to 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_\alpha(x) = 1$. C'est-à-dire :

$$S_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

De plus : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = +\infty$. On retrouve donc le résultat de la question 4.(c) :

$$\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty.$$

9. a) Il suffit de reprendre le changement de variable $u = xt^\alpha$ de la question 7.(c) en changeant les bornes. Si $x > 0$, alors l'application $t \mapsto xt^\alpha$ est strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[x, +\infty[$, et on en déduit :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u. \tag{3}$$

b) Soit $x > 0$, et soit $b \geqslant x$. Nous allons intégrer par parties sur le segment $[x, b]$: l'application $u \mapsto e^{-u}$ est continue sur $[a, x]$ et l'application $u \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_x^b e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u &= \left[-e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]_x^b - \int_x^b (-e^{-u})\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u\\ &= -e^{-b}b^{\frac{1}{\alpha}-1} + e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^b e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-b}b^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On en déduit, quand $b \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u, \tag{4}$$

d'où l'égalité demandée pour tout $x > 0$.
L'objectif de ce qui suit est de démontrer que l'intégrale du membre de droite est négligeable devant $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u$, de sorte à obtenir ainsi un équivalent de l'intégrale de gauche. Pour cela, l'énoncé nous demande de démontrer l'inégalité :

$$\forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u.$$

Pour la démontrer, il suffit d'utiliser la minoration $u \geqslant x$ valable pour tout $u \geqslant x$, qui implique en particulier :

$$\forall u \in [x, +\infty[, \quad e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2} = u^{-1}\cdot e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1} \leqslant x^{-1}e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[x, +\infty[$, on en déduit l'inégalité demandée :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u. \tag{5}$$

On en déduit aisément : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u\right)$ (le quotient des deux intégrales est majoré par $\dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$). En combinant (4) et (5), on obtient donc :

$$\begin{aligned}e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} &= \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u - \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}. \tag{6}$$

c) On combine (3) et (6), et on en déduit :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{\alpha x}.$$

À l'évidence, le terme de droite est négligeable devant e^{-x} quand $x \to +\infty$ (puisque : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x} = 0$), donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant e^{-x} quand $x \to +\infty$.

10. a) On reprend la comparaison entre série et intégrale de la question 8.(c), mais en sommant à partir de $n = 1$ au lieu de $n = 0$, et on ne conserve que la première inégalité. On obtient alors :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} \, \mathrm{d}t.$$

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$S_\alpha(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}.$$

On en déduit :

$$\forall x > 0, \quad e^{-x} \leqslant S_\alpha(x) - 1 \leqslant e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}. \tag{7}$$

Or, d'après les questions 9.(c) et 10.(a), on a :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} \, \mathrm{d}t = \underset{x \to +\infty}{o}\left(e^{-x}\right),$$

ce dont on déduit que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(e^{-x}\right)$, puis :

$$e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(e^{-x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

Donc, d'après l'encadrement (7) (et un usage soigné du théorème des gendarmes), on en déduit :

$$S_\alpha(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆