CORRIGÉ : SUITES ADJACENTES CONVERGEANT VERS $\ln x$ (d'après ESIM 1990, Maths appliquées)

1. **a)** Soit $P(n)$ la propriété pour $n \in \mathbb{N}$:
« $S_n = 2^n \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2^n}$, $C_n = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2^n}$ et $T_n = 2^n \operatorname{th} \frac{\varphi}{2^n}$ ».

• On a $\varphi = \ln x$ donc $x = e^{\varphi}$, d'où $S_0 = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}) = \operatorname{sh}\varphi$, $C_0 = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = \operatorname{ch}\varphi$ et $T_0 = \frac{S_0}{C_0} = \operatorname{th}\varphi$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• Supposons $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Alors $C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^n}}{2}} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2^{n+1}}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2^{n+1}}$.

De même, $S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} = \frac{2^n \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n}}{\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}} \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}}} = 2^{n+1} \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}}$.

Enfin, $T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{C_{n+1}} = 2^{n+1} \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^{n+1}}$.

$P(n+1)$ est donc vraie, et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 2^n \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2^n},\ C_n = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2^n} \text{ et } T_n = 2^n \operatorname{th} \frac{\varphi}{2^n}.}$

b) • Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2^{n+1} \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}} - 2^n \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n} = 2^{n+1} \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}} - 2^{n+1} \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}} \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}} \\ &= 2^{n+1} \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}} \underbrace{\left(1 - \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right)}_{\leqslant 0}. \end{aligned}$$

Or, pour $0 < x \leqslant 1$ on a $\varphi \leqslant 0$ et pour $x > 1$ on a $\varphi > 0$, donc la suite (S_n) est croissante si $0 < x \leqslant 1$ et décroissante si $x > 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= 2^{n+1} \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^{n+1}} - 2^n \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^n} = 2^{n+1} \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^{n+1}} - \frac{2^{n+1} \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{1 + \operatorname{th}^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}} \\ &= 2^{n+1} \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^{n+1}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}}\right)}_{\geqslant 0} \end{aligned}$$

La suite (T_n) est donc décroissante si $0 < x \leqslant 1$ et croissante si $x > 1$.

• Il est bien connu que $\operatorname{sh} u \sim_{u\to 0} u$ et $\operatorname{th} u \sim_{u \to 0} u$, donc $\lim S_n = \varphi = \ln x$ et $\lim T_n = \varphi = \ln x$.

Conclusion : $\boxed{\text{les suites } (S_n) \text{ et } (T_n) \text{ sont adjacentes, et convergent vers } \ln x.}$

De plus, si $0 < x \leqslant 1$, on a (S_n) croissante et (T_n) décroissante, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant \ln x \leqslant T_n}$

et de même si $x > 1$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n.}$

c) Un programme possible :

```
> Digits := 20:
> #On travaille avec 20 chiffres significatifs pour éviter les erreurs d'arrondi
> S := evalf((1/2)*(2-1/2)): #Valeur initiale S0
> C := evalf((1/2)*(2+1/2)): #Valeur initiale C0
> T := evalf(S/C):           #Valeur initiale T0
> for n from 0 to 10 do
> printf("S[%2d]=%0.10f  T[%2d]=%0.10f\n", n, S, n, T);
> #  Afficher les valeurs joliment
> C := sqrt((1+C)/2): # Calculer C au rang suivant
> S := S/C: # puis S au rang suivant
> T := S/C : # et enfin T au rang suivant
> end do:
```

S[0]=0.7500000000 T[0]=0.6000000000
S[1]=0.7071067812 T[1]=0.6666666667
S[2]=0.6966213995 T[2]=0.6862915010
S[3]=0.6940147578 T[3]=0.6914178698
S[4]=0.6933640138 T[4]=0.6927138800
S[5]=0.6932013851 T[5]=0.6930387944
S[6]=0.6931607314 T[6]=0.6931200802
S[7]=0.6931505683 T[7]=0.6931404052
S[8]=0.6931480275 T[8]=0.6931454867
S[9]=0.6931473923 T[9]=0.6931467571
S[10]=0.6931472335 T[10]=0.6931470747

2. **a)** On suppose $a+b\neq 0$. On sait que $\lim \mathrm{S}_n=\lim \mathrm{T}_n=\ln x$, d'où $\lim \mathrm{W}_n=\dfrac{a\ln x+b\ln x}{a+b}$ et $\boxed{\lim \mathrm{W}_n=\ln x.}$

De plus, on connaît les développements limités de $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 : $\operatorname{sh} x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)}{1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)}&=\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right)\\ &=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).\end{aligned}\tag{1}$$

On a donc, pour $n\in\mathbb{N}$ au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_n&=\frac{a\mathrm{S}_n+b\mathrm{T}_n}{a+b}=\frac{2^n a\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{2^n}+2^n b\operatorname{th}\dfrac{\varphi}{2^n}}{a+b}\\ &=2^n\,\frac{a\left(\dfrac{\varphi}{2^n}+\dfrac{\varphi^3}{6\cdot 2^{3n}}+\dfrac{\varphi^5}{120\cdot 2^{5n}}+o\left(\dfrac{1}{2^{5n}}\right)\right)+b\left(\dfrac{\varphi}{2^n}-\dfrac{\varphi^3}{3\cdot 2^{3n}}+\dfrac{2\varphi^5}{15\cdot 2^{5n}}+o\left(\dfrac{1}{2^{5n}}\right)\right)}{a+b}\\ &=\varphi+\frac{a-2b}{6(a+b)}\cdot\frac{\varphi}{4^n}+\frac{a+16b}{120(a+b)}\cdot\frac{\varphi^5}{16^n}+o\left(\frac{1}{16^n}\right).\end{aligned}\tag{2}$$

On a donc $\boxed{\ln x-\mathrm{W}_n=\dfrac{2b-a}{6(a+b)}\cdot\dfrac{\ln x}{4^n}-\dfrac{a+16b}{120(a+b)}\cdot\dfrac{(\ln x)^5}{16^n}+o\left(\dfrac{1}{16^n}\right).}$

b) Choisissons $a=2$ et $b=1$.

Alors, d'après ce qui précède, pour n tendant vers $+\infty$, $\mathrm{W}_n-\ln x=\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{(\ln x)^5}{16^n}+o\left(\dfrac{1}{16^n}\right)\sim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{(\ln x)^5}{16^n}.$

On obtient donc le résultat souhaité avec le choix $\boxed{a=2,\ b=1,\ \lambda=\dfrac{(\ln x)^5}{20}\ \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{2\mathrm{S}_n+\mathrm{T}_n}{3}.}$

Rem : En fait, n'importe quel choix de $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ tel que $a=2b$ conduit au mêmes valeurs de λ et de u_n.

3. **a)** On a pour x tendant vers 0, $\operatorname{sh} x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}+o(x^9)$.

Soit n au voisinage de $+\infty$. Alors :

$\mathrm{S}_n=2^n\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{2^n}=\varphi+\dfrac{\varphi^3}{3!\cdot 4^n}+\dfrac{\varphi^5}{5!\cdot 16^n}+\dfrac{\varphi^7}{7!\cdot 64^n}+\dfrac{\varphi^9}{9!\cdot 256^n}+o\left(\dfrac{1}{256^n}\right).$

S_n est donc de la forme $\mathrm{S}_n=\ln x+\dfrac{a}{4^n}+\dfrac{b}{16^n}+\dfrac{c}{64^n}+\dfrac{d}{256^n}+o\left(\dfrac{1}{256^n}\right)$, $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

On en déduit $\mathrm{S}_{n+1}=\ln x+\dfrac{a}{4\cdot 4^n}+\dfrac{b}{16\cdot 16^n}+\dfrac{c}{64\cdot 64^n}+\dfrac{d}{256\cdot 256^n}+o\left(\dfrac{1}{256^n}\right)$

Il apparaît donc clairement qu'en calculant $x_n=\dfrac{4\mathrm{S}_{n+1}-\mathrm{S}_n}{3}$, on «élimine» le terme en $\dfrac{1}{4^n}$, et on conserve (grâce à la division par 3) le premier terme $\ln x$, donc $\boxed{x_n \text{ a bien la forme voulue.}}$

Par le même type d'argument, $\boxed{y_n \text{ et } z_n \text{ ont bien la forme voulue.}}$

b) Un programme MAPLE possible :

(*Rem : Ce programme est très simpliste ! On peut, en réfléchissant, éviter l'utilisation de tableaux !*)

```
> Digits := 20:
> S[0] := evalf((1/2)*(2-1/2)):
> C[0] := evalf((1/2)*(2+1/2)): # Valeurs initiales
> for n to 7 do
> C[n] := sqrt((1+C[n-1])*(1/2));
> S[n] := S[n-1]/C[n]
> end do:
> for n to 6 do x[n] := (4*S[n+1]-S[n])*(1/3) end do:
> for n to 5 do y[n] := (16*x[n+1]-x[n])*(1/15) end do:
> for n to 4 do z[n] := (64*y[n+1]-y[n])*(1/63) end do:
> for n to 4 do
> printf("%d | %0.19f | %0.19f | %0.19f | %0.19f\n", n, S[n], x[n], y[n], z[n])
> end do:
> print(evalf(ln(2), 21)) # pour comparer
```

1 | 0.7071067811865475244 | 0.6931262722685015550 | 0.6931471842919202668 | 0.69314718055984810262

2 | 0.6966213994980130474 | 0.6931458772904565973 | 0.6931471806181617302 | 0.69314718055994493003

3 | 0.6940147578423457098 | 0.6931470991601801594 | 0.6931471805608545675 | 0.69314718055994530784

4 | 0.6933640138307215470 | 0.6931471754733124170 | 0.6931471805599595150 | 0.6931471805599453093

0.693147180559945309417

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆