DM N°6 (pour le 06/12/2011)

Partie I

1. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On note $\mathrm{J}_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2. Donner la valeur de J_k. On pourra utiliser l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On note $\mathrm{K} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$.

4. a) Montrer que : $\mathrm{K} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}(1+\mathrm{e}^{-2t})}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que : $\mathrm{K} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$.

5. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \mathrm{K} < 1$.

Partie II

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout réel x dans $]0,\pi[$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

6. a) Pour tout x dans $]0,\pi[$, montrer que $\mathrm{A}_n(x) = \dfrac{\sin(nx/2)\sin\big((n+1)x/2\big)}{\sin(x/2)}$.

b) Si $n \geqslant 2$, montrer que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k(x)\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) + \varepsilon_n(x)$ où $\big(\varepsilon_n(x)\big)_{n\geqslant 2}$ est une suite tendant vers 0.

7. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

8. a) Montrer l'existence d'une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $f_{2n}\big(\pi/(4n)\big) - f_n\big(\pi/(4n)\big) \geqslant \mathrm{C}\sqrt{n}$. Expliciter une telle constante.

b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,\pi[$?

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Si $z = a + \mathrm{i}b$ est un nombre complexe avec a et b réels, on désigne par $\mathscr{I}m\,\mathrm{m}(z)$ sa partie imaginaire, c'est-à-dire b.

9. a) Soit $x \in]0,\pi[$. Déterminer le tableau de variations de la fonction $t \mapsto |\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t}-1|$ définie pour $t \in]0,+\infty[$.

b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t})}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

c) Établir alors que : $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \mathscr{I}m\,\mathrm{m} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t}-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t})}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que : $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t-\cos x)}$.

e) Montrer que $f(x) > 0$.

f) En comparant les valeurs de $\mathrm{ch}\,t$ et e^t sur $]0,+\infty[$, montrer que $1/2 < f(\pi/2) < 1$.

Partie III

Dans cette partie, $x \in]0,\pi/2[$.

10. a) Établir que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que : $f(2x) = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$.

11. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]0,\pi[$.

12. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆