Corrigé DM n°7 [CENTRALE MP 1997]

PRÉLIMINAIRES

1) a) • $u_n = o(v_n) \Rightarrow |u_n| = o(v_n)$. D'après les th. de comparaison des séries à termes positifs : $\sum |u_n|$ est convergente.

Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente. ($\mathbb{R}$ est complet !)

• $u_n = o(v_n)$ s'écrit : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n| = \varepsilon v_n$

Donc, pour $n \geq n_0$, en additionnant les inégalités précédentes, et puisque les séries convergent, on obtient : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |R_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon R'_n$

ce qui signifie : $R_n = o(R'_n)$

b) $u_n \sim k v_n \Leftrightarrow u_n - k v_n = o(v_n)$. D'après ce qui précède, on a alors, si cette condition est vérifiée ($\sum u_n$ converge) : $R_n - kR'_n = o(R'_n)$ soit : $R_n \sim kR'_n$

---

2) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et $\frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)}$; d'après le résultat précédent : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}$: $R_n \sim \frac{1}{n}$

---

3) On remarque que : $\frac{1}{k^3} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$

Or : $\frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1/2}{k-2}$, et, pour les mêmes raisons que ci-dessus :

$$R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1/2}{k-2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{2n(n-1)}$$

(les termes se "télescopent") soit $R'_n \sim \frac{1}{2n^2}$

---

4) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $\alpha > 1$. Alors : $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$ (la fonction $t \mapsto t^\alpha$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

et, puisque $\frac{1}{k^\alpha} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{1}{(k-1)^\alpha}$, on a : $\frac{1}{k^\alpha} \underset{k \to \infty}{\sim} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$.

Puisque $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge, on obtient, d'après 1.b :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \underline{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

(on retrouve ainsi, heureusement, les résultats des questions 2) et 3))

Partie I

1) a) Avec les hypothèses, une récurrence immédiate donne : $u_n \geq 0$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$ d'où $u_{n+1} - u_n = a_{n-1} u_{n-1} \geq 0$ pour $n \geq 1$ et : <u>(u_n) est croissante</u> (à partir du rang 1)

b) • Puisque (u_n) est croissante : $u_{n+1} \leq (1+a_{n-1}) u_n \leq e^{a_{n-1}} u_n$ pour $n \geq 2$ (car $e^x \geq 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant, par exemple, la convexité de la fonction exponentielle)

• Puis, par récurrence : $u_{n+1} \leq e^{a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1} u_2$

Si la série $\sum a_n$, à termes positifs, converge, on a : $a_{n-1}+\cdots+a_1 \leq A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

d'où $u_{n+1} \leq e^A \cdot u_2$. Ainsi, <u>$(u_n)$ croissante majorée converge.</u>

c) Supposons que la suite (u_n) converge, et soit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Puisque $u_n \geq u_1$ pour $n \geq 1$, on a $\ell \geq u_1 > 0$.

On a alors : $a_n u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$ d'où $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{\ell}$.

Puisque la <u>suite</u> (u_n) converge, la <u>série</u> de t.g. $u_{n+2}-u_{n+1}$ converge donc <u>$\sum a_n$ converge</u> (th. de comparaison des séries à termes réels positifs)

---

2) a) On démontre facilement par récurrence sur n : $|u_n| \leq v_n$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$

b) On a donc : $|u_{n+1} - u_n| = |a_{n-1} u_{n-1}| = |a_{n-1}||u_{n-1}| \leq |a_{n-1}| v_{n-1}$.

Or la suite (v_n) converge d'après 1.b (car $\sum |a_n|$ est convergente ; l'hypothèse $v_1 > 0$, qui n'est plus vérifiée ici, n'a servi qu'en 1.c ; pour 1.b, $v_1 \geq 0$ suffit...)

Donc (v_n) est majorée ; si M est un majorant de la suite (v_n) on a donc :

$$\forall n \geq 1, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq M.|a_{n-1}|$$

Or la série $\sum |a_{n-1}|$ converge, donc la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ aussi.

<u>Ainsi, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente</u>

Et, puisque $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, la suite (u_n) converge.

---

3) Si $a_n = a^n$ avec $a \in]0,1[$, $\sum a_n$ converge donc (u_n) converge. Soit $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ supposée non nulle.

On a alors : $u_{k+1} - u_k = a_{k-1} u_{k-1} \underset{k\to\infty}{\sim} L a_{k-1} = L a^{k-1}$

D'après le résultat du 1.b de la question préliminaire, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1}-u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} L a^{k-1}$$

Or $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = L - u_n$ et $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} L a^{k-1} = \dfrac{L.a^{n-1}}{1-a}$. D'où : $L - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{La^{n-1}}{1-a}$

---

4) Si $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum a_n$ converge ; par suite, (u_n) converge

Soit $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, supposée non nulle.

a) Le même calcul qu'au 3°, avec les mêmes justifications, donne :

$$L - u_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} L a_{k-1} = L \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = L \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{L}{n}$$

soit $L - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{L}{n}$.

b) $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \left(u_{n+1} - L + \dfrac{L}{n+1}\right) - \left(u_n - L + \dfrac{L}{n}\right) = u_{n+1} - u_n + \dfrac{L}{n+1} - \dfrac{L}{n}$

$$= a_{n-1}u_{n-1} - \frac{L}{n(n+1)} = \frac{u_{n-1} - L}{n(n+1)}$$

d'où $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \sim \dfrac{1}{n(n+1)}\left(-\dfrac{L}{n}\right) \sim \dfrac{-L}{n^3}$.

La série de terme général $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ est donc convergente et, en utilisant les résultats du préliminaire : $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{-L}{k^3} \sim \dfrac{-L}{2n^2}$

Or $\varepsilon_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ par définition, donc, en particulier, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$

d'où : $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) = -\varepsilon_n$. Finalement, on a : $-\varepsilon_n \sim \dfrac{-L}{2n^2}$, soit $\varepsilon_n \sim \dfrac{L}{2n^2}$

et on en déduit : $u_n = L - \dfrac{L}{n} + \dfrac{L}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

PARTIE II :

1) Soient (u_n), (v_n) définies par la relation (R) et leurs deux premiers termes. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie aussi la relation (R) ; de plus, $\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} u_n + \mu \lim_{n\to\infty} v_n$, soit $L(\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda L(u_0,u_1) + \mu L(v_0,v_1)$

donc L est linéaire.

---

2) a) Supposons qu'il existe m tel que $u_m = 0$; soit m le plus petit entier vérifiant alors cette propriété (de sorte que $m=0$, ou $m \geq 1$ et $u_{m-1} \neq 0$)

• 1er cas : $m = 0$. Alors $u_0 = 0$, donc $u_1 \neq 0$ par hypothèse. Supposons, par exemple, $u_1 > 0$. $u_2 = u_1 + a_0 u_0 = u_1$ et $u_3 = u_2 + a_1 u_1 > u_2$ (car $a_1 > 0$, $u_1 > 0$). Il est alors facile de montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2. Donc $u_n > u_2 > 0$ pour tout n, d'où $L \geq u_2 > 0$, et L est non nulle.

• 2e cas : $m \geq 1$. Alors $u_{m-1} \neq 0$. Supposons, par ex., $u_{m-1} > 0$

On a alors : $u_{m+1} = 0 + a_{m-1} u_{m-1} > 0$, puis $u_{m+2} = u_{m+1}$, puis $u_{m+3} = u_{m+2} + a_{m+1} u_{m+1} > u_{m+2} > 0$

et on montre alors par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang $m+2$. On conclut alors comme ci-dessus.

b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donc $rg(L) \leq 1$. On ne peut pas avoir $rg(L) = 0$, sinon L serait l'application nulle, ce qui n'est pas le cas d'après ce qui précède (considérer par ex. la suite avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$). On a donc $rg(L) = 1$, d'où

$\dim N = \dim \mathbb{R}^2 - 1 = 1$, d'après le th. du rang.

---

3) a) • Supposons $(u_0, u_1) \in N$, i.e. $L(u_0,u_1) = 0$. Alors, d'après 2. a., les termes de la suite (u_n) sont tous non nuls. De plus, on ne peut pas avoir deux termes consécutifs de même signe. En effet, si on avait, par. ex., u_n et u_{n-1} strictement positifs, la suite (u_n) serait strictement croissante à partir du rang n, et on ne pourrait pas avoir $L = 0$.

La suite est donc alternée.

• Si (u_n) est alternée et a pour limite L, alors $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout n implique $L^2 \leq 0$, d'où $L = 0$, et $(u_0, u_1) \in N$.

5

b) N est une droite vectorielle ; si (u_0, u_1) en est une base, on a :
$N = \{(\lambda u_0, \lambda u_1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, donc le rapport $-\frac{v_1}{v_0}$, pour $(v_0, v_1) \in N - \{(0,0)\}$
est constant ($v_0 \neq 0$ d'après 2a)

---

4) a) • $u_{n+1} = u_n + a_{n-1} u_{n-1}$ d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a_{n-1}\frac{u_{n-1}}{u_n}$ soit $r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$

(rem : aucun des u_n n'est nul d'après 2.a)

• $u_{n+2} = u_{n+1} + a_n u_n \Rightarrow \frac{u_{n+2}}{u_n} = a_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} = a_n - r_n$. Or $\frac{u_{n+2}}{u_n} > 0$ (car la suite est alternée) d'où $a_n > r_n$.

• Enfin, $r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ car la suite est alternée.

On a donc bien : $\underline{0 < r_n < a_n}$.

b) Donc : $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \lim(a_n) = 0$ d'où $\underline{\lim(r_n) = 0}$

c). $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum r_n$ converge.
• $r_n \to 0$ donc $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, et $\sum |u_n|$ converge d'après la règle de d'Alembert.

$\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

---

1) a) • f_n est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante.
• Par suite g_n est aussi de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$. Puisque g_n est la composée de $(n+1)$ fonctions décroissantes, g_n est strict. décroissante si n est pair
strict. croissante si n est impair

• Démontrons l'inégalité : $|g_n'(x)| \leq a_0 a_1 \dots a_n$ par récurrence sur n.

– pour $n = 0$: $g_0'(x) = f_0'(x) = \frac{-a_0}{(1+x)^2}$ d'où $|g_0'(x)| \leq a_0$.

– supposons l'inégalité démontrée au rang $n-1$, pour $\forall x \geq 0$. Alors :

$g_n = g_{n-1} \circ f_n \Rightarrow g_n'(x) = f_n'(x) \cdot g_{n-1}'[f_n(x)]$

$\Rightarrow |g_n'(x)| \leq |f_n'(x)| \cdot |g_{n-1}'[f_n(x)]|$

$\leq a_n \cdot a_0 a_1 \dots a_{n-1}$, car $f_n'(x) = \frac{-a_n}{(1+x)^2}$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence (car $f_n(x) \geq 0$)
d'où le résultat au rang n.

b) Pour $n \geq 1$, $g_n(0) = g_{n-1}[f_n(0)]$ d'où :

$$|p_n - p_{n-1}| = |g_{n-1}[f_n(0)] - g_{n-1}(0)| \leq \|g'_{n-1}\|_\infty \cdot |f_n(0) - 0|$$

d'après l'inégalité des accroissements finis.

Or $\|g'_{n-1}\|_\infty \leq a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ et $|f_n(0)| = a_n$, d'où l'inégalité cherchée.

---

2) a) Puisque $\sum a_n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, donc il existe n_0 tq $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq 1$.

Pour $n \geq n_0$, on a alors, pour $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$|p_{n+k} - p_n| \leq |p_{n+k} - p_{n+k-1}| + |p_{n+k-1} - p_{n+k-2}| + \dots + |p_{n+1} - p_n|$$

$$\leq a_0 a_1 \cdots a_{n+k} + a_0 a_1 \cdots a_{n+k-1} + \dots + a_0 a_1 \cdots a_{n+1}$$

$$\leq (a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1})(a_0 a_1 \cdots a_{n_0})$$

(en majorant tous les a_i "superflus" par 1)

Or $a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_{n+1} \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i$, soit : $|p_{n+k} - p_n| \leq (a_0 a_1 \cdots a_{n_0}) \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i = 0$, on en déduit que la suite (p_n) est de Cauchy.

b) On a : $r_{n-1} = f_{n-1}(r_n)$ (d'après II.4.a) et, puisque (f_n) est strictement décroissante et que $0 < r_n < a_n$, on en tire : $f_{n-1}(a_n) < r_{n-1} < f_{n-1}(0)$

soit $f_{n-1}(f_n(0)) < r_{n-1} < f_{n-1}(0)$

On en déduit, puisque f_{n-2} est strictement décroissante :

$$f_{n-2} \circ f_{n-1}(f_n(0)) > r_{n-2} > f_{n-2} \circ f_{n-1}(0)$$

etc... (récurrence !), et on aboutit à : r_0 strictement compris entre p_n et p_{n-1}

c) (p_n) est convergente car c'est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet

D'après ce qui précède, on a : $\lim_{n\to\infty} p_n = r_0$.

---

3) 4) Le programme MAPLE, correspondant à la suite $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(avec une précision de 10^{-20}) est à la page suivante :

$\longrightarrow$

```
> f:=(x,n)->1/(n+1)/(n+2)/(1+x):
  p0:=f(0,0):p1:=f(f(0,1),0):
  Digits:=21:
  eps:=1E-20:n:=2:
  while abs(p0-p1)>eps do
     p2:=f(0,n);
     for i from n-1 by -1 to 0 do
        p2:=f(p2,i);
     od;
     n:=n+1;
     p0:=p1;p1:=p2
  od:
  if p0>p1 then printf(`r0 est compris entre %a et %a pour %a
  itérations`,                          evalf(p1),evalf(p0),n)
           else printf(`r0 est compris entre %a et %a pour %a
  itérations`,                          evalf(p0),evalf(p1),n)
  fi;
>
r0 est compris entre .433127426722311758316 et .433127426722311758317 pour 13 i
térations
>
```

[PA]RTIE IV

1) Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière. On a alors:

a)

$$(x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = 0$$

soit $$- \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [2 n u_n + n(n-1) u_n] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = 0$$

soit $$- \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) u_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = 0$$

$$\text{d'où : } u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} u_n$$

On reconnaît donc la relation de récurrence du pb, dans le cas II.4

Il y a alors deux cas:

— soit la limite L de la suite (u_n) n'est pas nulle (par ex. pour $u_0 = 0, u_1 = 1$ d'après II.2a) : dans ce cas $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 1$, et la série entière a pour rayon de convergence 1 (d'Alembert)

— soit la suite (u_n) tend vers zéro (si $(u_n) \in \operatorname{Ker} L$ qui est de dim. 1) : d'après II, le rapport $r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0, donc le rayon de convergence est infini (d'Alembert)

Les deux solutions ci-dessus sont linéairement indépendantes; elles forment donc une base de l'e.v. des solutions de (E) définies sur $]-1,1[$ (ce qui répond aux deux questions)

3) D'après l'énoncé, on est dans le cas où $L \neq 0$ (avec les notations précédentes).

D'après I.4.b, on sait que : $u_n = L - \frac{L}{n} + \frac{L}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= L - \frac{L}{n} + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{L}{2n^2}$

D'où : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(L - \frac{L}{k} + \varepsilon_k\right) x^k$ pour $x \in]-1,1[$

$= L \sum_{k=0}^{+\infty} x^k - L \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k x^k$

(ces trois séries convergent !)

soit : $\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{L}{1-x} + L \ln(1-x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k x^k$

$= \frac{L}{1-x} + L \ln(1-x) + g(x)$

avec $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k x^k$.

Or, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k x^k$ converge normalement sur $[-1,1]$, puisque $\| \varepsilon_k x^k \|_\infty^{[-1,1]} = |\varepsilon_k|$ et, puisque $\varepsilon_k \sim \frac{L}{2k^2}$, $\sum |\varepsilon_k|$ converge.

Elle converge donc uniformément sur $[-1,1]$ et le th. d'interversion des limites donne : $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k$ existe.

~ FIN ~