CORRIGÉ DU DM N°1 (CAPES Ext. 2008)

Autour d'un théorème de Tchebychev concernant la répartition des nombres premiers.

PARTIE A : Une estimation à la Tchebychev

I. Une minoration de la fonction π

A.I.1.

A.I.1.a. Comme $a \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \to (1-x)^{a-1}$ est continue sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot$

A.I.1.b. Une intégration par parties avec des fonctions polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$, donne

$$\mathrm{I}(b+1,a) = \int_0^1 \underbrace{x^b}_{=u}\underbrace{(1-x)^{a-b-1}}_{=v'}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b-a}(1-x)^{a-b}\times x^b\right]_0^1 + \frac{b}{a-b}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a-b}\mathrm{I}(b,a)\,.$$

A.I.1.c. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(b,a) &= \frac{b-1}{a-b+1}\mathrm{I}(b-1,a) = \frac{b-1}{a-b+1}\,\frac{b-2}{a-b+2}\mathrm{I}(b-2,a) = \cdots\\ &= \frac{(b-1)!}{(a-b+1)\cdots(a-1)}\mathrm{I}(1,a) = \frac{(b-1)!(a-b)!}{a!} = \frac{1}{b\binom{a}{b}}\cdot\end{aligned}$$

A.I.2.

A.I.2.a. Il suffit de développer par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{a-1}\binom{a-1}{j}x^jy^j(1-x)^{a-1-j}\,\mathrm{d}x\\ &\underbrace{=}_{j=k-1}\sum_{k=1}^{a}\left(\int_0^1\binom{a-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{a-k}\,\mathrm{d}x\right)y^{k-1} = \sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1}\mathrm{I}(k,a)y^{k-1}\,.\end{aligned}$$

A.I.2.b. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1}\mathrm{I}(k,a)y^{k-1} &= \int_0^1 (1+(y-1)x)^{a-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a(y-1)}\left[(1+(y-1)x)^a\right]_0^1 = \frac{y^a-1}{a(y-1)} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a}y^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme dans la base canonique de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ (en d'autres termes on « identifie » les coefficients des y^{k-1}), il vient : $\displaystyle\binom{a-1}{k-1}\mathrm{I}(k,a) = \frac{1}{a}$; donc, pour tout $k \in [\![1,a]\!]$:

$$\mathrm{I}(k,a) = \frac{1}{a\binom{a-1}{k-1}}$$

ce qui, pour $k=b$, donne le résultat demandé.

A.I.3.

A.I.3.a. On a, en utilisant encore la formule du binôme :

$$\mathrm{I}(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}x^{k+b-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}\cdot$$

A.I.3.b. On remarque que si $k \in [\![0, a-b]\!]$, alors $k+b \in [\![b, a]\!]$. Ainsi $\dfrac{\Delta_a}{k+b} \in \mathbb{N}$.

Comme $\dbinom{a-b}{k} \in \mathbb{N}$, $(-1)^k \in \mathbb{Z}$, il vient $\mathrm{I}(b,a)\Delta_a \in \mathbb{Z}$.

Mais $\mathrm{I}(b,a) > 0$ et $\Delta_a \in \mathbb{N}$. Donc $\mathrm{I}(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}$.

Or $\mathrm{I}(b,a)\Delta_a = \dfrac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}}$ donc $b\binom{a}{b}$ divise Δ_a.

A.I.4.

A.I.4.a. Pour $a = 2n$ et $b = n$, la question précédente donne $n\dbinom{2n}{n}$ divise Δ_{2n}, qui lui-même divise Δ_{2n+1}.

Et $(2n+1)\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n+1)!}{n!n!} = (n+1)\dbinom{2n+1}{n+1}$ divise Δ_{2n+1}, toujours d'après la question précédente.

A.I.4.b. On remarque que n et $2n+1$ sont premiers entre eux, car si $p > 1$ divise n, il divise $2n$ et ne peut diviser $2n+1$ (sinon il diviserait leur différence !).

Par le lemme de Gauss et la remarque précédente, le produit $n(2n+1)\dbinom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

A.I.4.c. Posons $u_{n,k} = \dbinom{2n}{k}$, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$. On a :

$$\frac{u_{n,k+1}}{u_{n,k}} = \frac{2n-k}{k+1}$$

Ainsi, $\dfrac{u_{n,k+1}}{u_{n,k}} \leqslant 1$ (resp. > 1) si et seulement si $k \leqslant n - \frac{1}{2}$ (resp. $k > n - \frac{1}{2}$).

Ainsi la suite $(u_{n,k})_k$ est croissante sur $[\![0, n-1]\!]$ et décroissante sur $[\![n, 2n]\!]$.

Or $u_{n,n-1} = \dfrac{n}{n+1} \times u_{n,n} < u_{n,n}$. Tous les termes de la suite sont donc bien inférieurs à $u_{n,n} = \dbinom{2n}{n}$.

A.I.4.d. On a

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leqslant (2n+1)\binom{2n}{n},$$

en majorant chaque terme par le maximum, puisqu'il y a $2n+1$ termes.

A.I.4.e. On sait que $n(2n+1)\dbinom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}, donc lui est inférieur, et que $(2n+1)\dbinom{2n}{n} \geqslant 4^n$. Donc $\Delta_{2n+1} \geqslant n4^n$.

A.I.4.f. Soit $n \geqslant 9$. Si n est impair, on pose $n = 2m+1$ avec $m \geqslant 4$. Alors d'après la question précédente

$$\Delta_n \geqslant m4^m = \frac{n-1}{2}2^{n-1} \geqslant 4 \times 2^{n-1} > 2^n.$$

Si n est pair, on pose $n = 2m$ avec $m \geqslant 5$, et l'on a

$$\Delta_n = \Delta_{2m} \geqslant \Delta_{2m-1} \geqslant (m-1)4^{m-1} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^{n-2} \geqslant 4 \times 2^{n-2} = 2^n$$

ce qui établit le résultat dans tous les cas.

On vérifie ensuite que ce résultat reste valable pour $n = 7$ et $n = 8$ à l'aide de la calculatrice :

$$\Delta_8 = 840 > 2^8 = 256, \Delta_7 = 420 > 2^7 = 128, \text{ mais } \Delta_6 = 60 < 2^6 = 64.$$

A.I.5.

A.I.5.a. D'après la propriété rappelée en début d'énoncé concernant la valuation d'un ppcm, on a :

$$\nu_p(\Delta_n) = \max(\nu_p(2), \ldots, \nu_p(n)).$$

En particulier, il existe un entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\nu_p(\Delta_n) = \nu_p(k)$. Donc

$$p^{\nu_p(\Delta_n)} = p^{\nu_p(k)} \leqslant \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(k)} = k \leqslant n.$$

A.I.5.b. Il résulte de l'inégalité précédente que, si $p \in \mathcal{P}$ est tel que $v_p(\Delta_n) \geqslant 1$, on a $p \leqslant p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$, donc si p est un nombre premier tel que $p > n$ on a nécessairement $v_p(\Delta_n) = 0$ donc

$$\Delta_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(\Delta_n)} = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)} .$$

A.I.5.c. Donc en utilisant la majoration de **A.I.5.a** :

$$\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n = n^{\pi(n)} .$$

A.I.6.

A.I.6.a. On sait que $n^{\pi(n)} \geqslant \Delta_n \geqslant 2^n$, cette dernière inégalité étant vraie pour $n \geqslant 7$. En prenant le logarithme : $\pi(n) \geqslant \ln 2 \times \dfrac{n}{\ln n}$.

A.I.6.b. . On a $\pi(2) = 1 < 2$, $\pi(3) = 2 \geqslant 1.892789260$, $\pi(4) = 2 \geqslant 22$, $\pi(5) = 3 \geqslant 2.153382791$ et $\pi(6) = 3 \geqslant 2.321116844$, donc l'inégalité est en fait valable pour tout $n \geqslant 3$.

II. Une majoration de la fonction π

A.II.1.

A.II.1.a. Par définition :

$$\binom{b}{a} = \frac{(a+1) \times \cdots \times (b-1) \times b}{(b-a)!} .$$

Soit p premier tel que $a < p \leqslant b$ (s'il en existe !) Alors p figure dans le produit $(a+1) \times \cdots \times (b-1) \times b$ et par suite p divise $(b-a)!\binom{b}{a}$.

Mais compte tenu de l'hypothèse de l'énoncé, on a $b - a \leqslant a$ donc p est strictement plus grand que tous les entiers qui figurent dans le produit $(b-a)!$; il est donc premier avec tous ces entiers, donc avec leur produit, et d'après le théorème de Gauss, on en déduit que p divise $\binom{b}{a}$. Comme il s'agit de nombres premiers, le produit $\prod\limits_{a<p\leqslant b} p$ divise aussi $\binom{b}{a}$.

A.II.1.b. Il suffit que remarquer que si $a = m+1$ et $b = 2m+1$, alors $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$; on peut donc directement appliquer le résultat précédent.

A.II.1.c. . Il suffit ici d'utiliser la propriété bien connue $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$...

A.II.1.d. Facilement :

$$4^m \times 2 = 2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geqslant \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2\binom{2m+1}{m} .$$

A.II.1.e. $\prod\limits_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$ donc $\prod\limits_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

A.II.1.f. Montrons par récurrence la propriété P_n.

- pour $n = 1$, l'entier k appartient alors à $\{1, 2\}$. Pour $k = 1$ on a $\prod\limits_{p \leqslant 1} p = 1$ (par convention, car il n'y a aucun nombre premier $\leqslant 1$!) et $1 \leqslant 4$; pour $k = 2$ $\prod\limits_{p\leqslant 2} p =$ et $2 \leqslant 4^2$...
- supposons la propriété P_n vérifiée. Il s'agit de démontrer P_{n+1} c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![1, 2n+2]\!] , \prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^k .$$

Compte tenu de P_n, il suffit de le vérifier pour $k = 2n+1$ et $k = 2n+2$. De plus $2n+2 = 2(n+1)$ n'étant pas un nombre premier, on a $\prod\limits_{p\leqslant 2n+2} p = \prod\limits_{p \leqslant 2n+1} p$ donc il ne reste plus qu'à démontrer l'inégalité $\prod\limits_{p\leqslant 2n+1} p \leqslant 4^{2n+1}$, ce qui découle de la question précédente puisque :

$$\prod_{p\leqslant 2n+1} p = \prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p \times \underbrace{\prod_{p\leqslant n+1} p}_{\substack{\text{on utilise l'hyp.}\\ \text{de récurrence}}} \leqslant 4^n \times 4^{n+1} = 4^{2n+1}\,.$$

Cela achève la récurrence.

A.II.2.

A.II.2.a. *Pour les 5/2 :* on sait que $\mathrm{e}^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!}$ donc $\mathrm{e}^m > \dfrac{m^m}{m!}$.

Sinon : en posant $u_m = \dfrac{m!\mathrm{e}^m}{m^m}$ on a $\dfrac{u_{m+1}}{u_m} = \mathrm{e}\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^m$ donc $\ln\left(\dfrac{u_{m+1}}{u_m}\right) = 1 - m\ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right)$; on connaît l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout réel $x > -1$, donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right) \leqslant \dfrac{1}{m}$ et $\ln\left(\dfrac{u_{m+1}}{u_m}\right) \geqslant 0$; on a donc $\dfrac{u_{m+1}}{u_m} \geqslant 1$ et la suite (u_m) est croissante.

On aura donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $u_m \geqslant u_1 \geqslant 1$, ce qui donne l'inégalité demandée.

A.II.2.b. Notons p_k le k-ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3\ldots$). Ainsi les nombres premiers inférieurs à n sont $p_1, p_2, \ldots, p_{\pi(n)}$. De plus on a de façon évidente $p_k \geqslant k$ pour tout k donc

$$\pi(n)! = 2\times 3\times\cdots\times\pi(n) \leqslant p_1\times p_2\times\cdots\times p_{\pi(n)} = \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n\,.$$

Puisque d'après la question précédente $\pi(n)! \geqslant \left(\dfrac{\pi(n)}{\mathrm{e}}\right)^{\pi(n)}$ on en déduit $\left(\dfrac{\pi(n)}{\mathrm{e}}\right)^{\pi(n)} \leqslant 4^n$ puis en prenant le logarithme :

$$\pi(n)\left(\ln(\pi(n)) - 1\right) \leqslant n\ln 4\,.$$

A.II.3.

A.II.3.a. Si $f(x) = x\ln x - x$, alors $f'(x) = \ln x$ montre que la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Supposons que $\mathrm{e}\dfrac{n_0}{\ln n_0} < \pi(n_0)$.

La question précédente montre que $f(\pi(n_0)) \leqslant n_0\ln 4$. Par stricte croissance de la fonction f on aura

$$f\left(\mathrm{e}\frac{n_0}{\ln n_0}\right) < f(\pi(n_0)) \leqslant n_0\ln 4$$

ce qui implique, en utilisant la définition de f :

$$\frac{\mathrm{e}}{\ln n_0}(\ln n_0 - \ln\ln n_0) < \ln 4$$

soit

$$\frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0} > 1 - \frac{\ln 4}{\mathrm{e}}\,.$$

A.II.3.b. Une étude rapide de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$, montre que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, le maximum étant atteint en $x = \mathrm{e}$. Ainsi

$$\frac{\ln 4}{\mathrm{e}} < \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$$

soit $\mathrm{e} < 1 + \ln 4$, ce qui est faux car $\mathrm{e} \approx 2.718 > 1 + \ln(4) \approx 2.386$.

PARTIE B : Autour d'un théorème de Mertens

I. Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

B.I.1. L'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $n < p^k$ est non vide (car $\lim\limits_{k \to +\infty} p^k = +\infty$). Il admet donc un plus petit élément k_0.

Comme $n \geqslant 2$, il vient $k_0 \geqslant 1$ et cet entier k_0 est défini par

$$p^{k_0 - 1} \leqslant n < p^{k_0} \iff (k_0 - 1)\ln p \leqslant \ln n < k_0 \ln p \iff k_0 - 1 = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor .$$

B.I.2.

B.I.2.a. Si p^{k+1} divise a, alors p^k divise également a. Donc $\mathrm{U}_{k+1} \subseteq \mathrm{U}_k$.

Si $k \in [\![0, k_0 - 1]\!]$, on a $p^k \leqslant n$ par définition de k_0. Donc $p^k \in \mathrm{U}_k$. Mais p^{k+1} ne divise pas p^k, c'est-à-dire que p^k n'appartient pas à U_{k+1} ; cela prouve l'inclusion stricte $\mathrm{U}_{k+1} \subsetneq \mathrm{U}_k$.

Si $k \geqslant k_0$, on a $n < p^k$ donc p^k ne peut diviser aucun entier de $[\![1, n]\!]$ et $\mathrm{U}_k = \emptyset$.

B.I.2.b. Il suffit de passer aux complémentaires (car V_k est le complémentaire de U_k dans $[\![1, n]\!]$).

B.I.2.c. Il est évident que $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, puisque $\nu_p(a)$ est unique.

Si $a \in \Omega_i$, alors $a \in [\![1, n]\!]$ par définition, donc $\bigcup\limits_{i=0}^{k_0-1} \Omega_i \subset [\![1, n]\!]$.

Réciproquement, soit $a \in [\![1, n]\!]$. On décompose a en facteurs premiers :

$$a = p_1^{\nu_{p_1}(a)} \times p_2^{\nu_{p_2}(a)} \times \cdots \times p_j^{\nu_{p_j}(a)}$$

– s'il existe i tel que $p = p_i$, soit $k = \nu_p(a)$; alors $k \leqslant k_0 - 1$ car sinon on aurait $p^k > n$ d'où $a > n$ ce qui est faux ; donc $a \in \Omega_k \subset \bigcup\limits_{i=0}^{k_0-1} \Omega_i$.

– sinon, $\nu_p(a) = 0$ et $a \in \Omega_0 \subset \bigcup\limits_{i=0}^{k_0-1} \Omega_i$.

On a donc démontré l'autre inclusion $[\![1, n]\!] \subset \bigcup\limits_{i=0}^{k_0-1} \Omega_i$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

B.I.3.

B.I.3.a. Un entier a appartient à Ω_k si et seulement si $\nu_p(a) = k$ c'est-à-dire si et seulement si p^k divise a et p^{k+1} ne divise pas a (par définition de $\nu_p(a)$). Cela équivaut à dire que $a \in \mathrm{U}_k \cap \mathrm{V}_{k+1}$.

B.I.3.b. Pour $k \geqslant 1$, les éléments de U_k sont $p^k, 2p^k, \ldots, jp^k, \ldots$ avec $jp^k \leqslant n$ soit $j \leqslant \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Donc $\mathrm{card}(\mathrm{U}_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Par passage au complémentaire, $\mathrm{card}(\mathrm{V}_k) = n - \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Enfin, on connaît la formule :

$$\mathrm{card}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{V}_{k+1} = \mathrm{card}(\mathrm{U}_k) + \mathrm{card}(\mathrm{V}_{k+1}) - \mathbf{card}(\mathrm{U}_k \cup \mathrm{V}_{k+1}) .$$

Or $\mathrm{U}_{k+1} \cup \mathrm{V}_{k+1} = [\![1, n]\!]$ (ils sont complémentaires) donc aussi $\mathrm{U}_k \cup \mathrm{V}_{k+1} = [\![1, n]\!]$ (puisque $\mathrm{U}_{k+1} \subset \mathrm{U}_k \subset [\![1, n]\!]$). On a donc $\mathbf{card}(\mathrm{U}_k \cup \mathrm{V}_{k+1}) = n$ et la formule précédente conduit à

$$\mathrm{card}(\mathrm{U}_k \cap \mathrm{V}_{k+1} = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left(n - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) - n = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor .$$

B.I.4. Comme $n! = \prod\limits_{1 \leqslant a \leqslant n} k$, on a : $\nu_p(n!) = \sum\limits_{a=1}^{n} \nu_p(a)$. D'après la question **B.I.2.c** :-

$$\nu_p(n!) = \sum_{a=1}^{n} \nu_p(a) = \sum_{k=0}^{k_0-1} k\,\mathbf{card}(\Omega_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{card}(\Omega_k)$$

puisque $\mathrm{card}(\Omega_k) = 0$ pour $k \geqslant k_0$.

Donc

$$\begin{aligned}
\nu_p(n!) &= \sum_{k\geqslant 0}\left(k\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor - k\left\lfloor\frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\right)\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\left(k\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor - (k+1)\left\lfloor\frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\right) + \sum_{k\geqslant 0}\left\lfloor\frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\left\lfloor\frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor \quad \text{(par téléscopage et somme finie)}\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\left\lfloor\frac{n}{p^{k}}\right\rfloor \left(= \sum_{k=1}^{k_0-1}\left\lfloor\frac{n}{p^{k}}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n}{p^{k}}\right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

II. Un théorème de Mertens

B.II.1. On sait que $x-1<\lfloor x\rfloor \leqslant x$. Donc, par la formule de Legendre

$$\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{n}{p^k}-1\right) < \nu_p(n!) \leqslant \sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{n}{p^k}$$

Or d'une part

$$\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{n}{p^k}-1\right) \geqslant \frac{n}{p}-1$$

(car tous les termes de la somme sont positifs) et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{k_0}\frac{n}{p^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n}{p^k} = \frac{n}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$$

car on a ici reconnu une série géométrique convergente de raison $\dfrac{1}{p}$.

Puisque $\dfrac{n}{p-1} = \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}$, on obtient bien la double inégalité de l'énoncé.

B.II.2. La décomposition de $n!$ en facteurs premiers s'écrit

$$n! = \prod_{p\leqslant n} p^{\nu_p(n!)}\,.$$

Donc

$$\ln(n!) = \sum_{p\leqslant n}\nu_p(n!)\ln p\,.$$

Or

$$\frac{n}{p}-1 < \nu_p(n!) \leqslant \frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}$$

Donc

$$n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} - \sum_{p\leqslant n}\ln p < \ln n! \leqslant n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} + n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p(p-1)}$$

B.II.3.

B.II.3.a. La série entière $\sum \dfrac{x^k}{2^k}$ admet $\mathtt{R}=2$ comme rayon de convergence et a pour somme

$$\forall x\in\,]-2,2[\;,\; f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x} \quad \text{(série géométrique)}\,.$$

Pour tout x tel que $|x|<2$, on peut dériver cette série terme à terme. Il vient

$$\forall x\in\,]-2,2[\;,\; f'(x) = \sum_{k=1} @{+\infty}\frac{k}{2^k}x^{k-1} = \frac{2}{(2-x)^2}\,.$$

Pour $x=1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k} = 2\,.$$

B.II.3.b. On sait que pour $m \geqslant 2$
$$\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$$

Donc
$$\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2^{r-1}} - \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^r}\cdot$$

Ainsi
$$\mathrm{U}_r = \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leqslant \ln(2^r) \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{m(m-1)} \leqslant \frac{r\ln 2}{2^r}\cdot$$

B.II.3.c. La série de terme général U_r converge car $0 < \mathrm{U}_r \leqslant \ln 2 \dfrac{r}{2^r}$, qui est le terme général d'une série à termes positifs convergente et
$$\sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{U}_r \leqslant 2\ln 2 = \ln 4\,.$$

B.II.3.d. Comme, pour $m \geqslant 2$, $\dfrac{\ln m}{m(m-1)} > 0$, on peut sommer la série $\sum \frac{\ln m}{m(m-1)}$ par paquets et
$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} = \sum_{r=1}^{+\infty} \mathrm{U}_r \leqslant \ln 4\,.$$

B.II.3.e. On a, pour $u \geqslant 0$
$$\ln(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t} \leqslant u$$

et la formule de Taylor avec reste intégrale pour la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donne
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u (t-u) \times \frac{dt}{(1+t)^2} \geqslant u - \frac{u^2}{2}\cdot$$

(on pouvait aussi, bien sûr, étudier les fonctions $u \mapsto \ln(1+u) - u$ et $u \mapsto \ln(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2}$).

Il suffit ensuite de remplacer u par $\frac{1}{n}$ pour montrer que
$$1 - \frac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$$

et
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\cdot$$

B.II.3.f. – *Première méthode* : Comme le suggère l'énoncé, démontrons la propriété
$$(\mathrm{P}_n) \quad : \quad \text{il existe un réel } \theta_n \in [0,1] \text{ tq } \ln n! = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$$

par récurrence sur n.

– On le vérifie aisément pour $n = 1$ (!) et $n = 2$ (on trouve $\theta_2 = \dfrac{1-\ln 2}{\ln 2} \approx 0,44$).

– Supposons la propriété acquise à l'ordre n. Alors
$$\begin{aligned}\ln(n+1)! &= \ln n! + \ln(n+1) = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n + \ln(n+1)\\ &= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1 + \underbrace{\left[1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \theta_n \ln n\right]}_{=\mathrm{A}_n} \quad (*)\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités démontrées dans la question précédente, ainsi que la propriété $\theta_n \in [0,1]$ on a

$$\mathrm{A}_n \leqslant 1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)+\theta_n \ln n \leqslant \frac{1}{2n}+\ln n \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln n=\ln(n+1)$$

et

$$\mathrm{A}_n \geqslant 1-1+\theta_n \ln n \geqslant 0\,.$$

A_n étant compris entre 0 et $\ln(n+1)$ il existe bien un réel $\theta_{n+1} \in [0,1]$ tel que $\mathrm{A}_n=\theta_{n+1}\ln(n+1)$, ce qui, en remplaçant dans $(*)$ donne la propriété à l'ordre $n+1$ et achève la récurrence.

– *Seconde méthode (bien meilleure)* : Utilisons une comparaison série/intégrale. La fonction $t \mapsto \ln t$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc, pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln t \,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k+1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leqslant \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k\,.$$

Donc (une primitive de $t \mapsto \ln t$ étant $t \mapsto t\ln t - t$) :

$$\ln n! - \ln n \leqslant n\ln n - n + 1 \leqslant \ln n!$$

soit $0 \leqslant \ln n! - n\ln n + n - 1 \leqslant \ln n$. Il existe donc un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que pour tout $n \geqslant 1$

$$\ln n! = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n\,.$$

B.II.4. En utilisant les questions B.II, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} &\geqslant \frac{\ln n!}{n} - \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p(p-1)}\\ &\geqslant \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \theta_n\frac{\ln n}{n} - \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p(p-1)}\\ &\geqslant \ln n - 1 - \ln 4 + \frac{1}{n} + \theta_n\frac{\ln n}{n}\\ &\geqslant \ln n - 1 - \ln 4\,.\end{aligned}$$

B.II.5. De même

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} &\leqslant \frac{\ln n!}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln p\\ &\leqslant \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \theta_n\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln p\\ &\leqslant \ln n - 1 + \frac{1}{n} + \theta_n\frac{\ln n}{n} + \ln 4 \quad \text{(en prenant le logarithme dans A.II.1.f)}\\ &\leqslant \ln n + \frac{\ln n - (n-1)}{n} + \ln 4 \leqslant \ln n + \ln 4 \quad (\text{car } \ln x \leqslant x-1)\end{aligned}$$

Ainsi

$$-\ln 4 - 1 \leqslant \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} - \ln n \leqslant \ln 4$$

ce qui montre que $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} = \ln n + \mathrm{O}(1)$.

III. Le comportement asymptotique de $\left(\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1.

B.III.1.a. On « sait » que la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge (série de Bertrand, avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2$), alors que la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (cas $\alpha = \beta = 1$). Les séries de Bertrand *n'étant pas au programme*, il faut le redémontrer.

Pour ce faire, on procède par comparaison série/intégrale :

$$\int_2^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = \int_{\ln 2}^{\ln \mathrm{X}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln \mathrm{X}} \text{ donc l'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} \text{ existe et vaut } \frac{1}{\ln 2}$$

et

$$\int_2^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_{\ln 2}^{\ln \mathrm{X}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\ln \mathrm{X} - \ln\ln 2 \underset{\mathrm{X}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ donc l'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \text{ diverge.}$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ étant continues, positives et décroissantes sur $[2, +\infty[$, le théorème du cours affirme alors que la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t}$, donc converge, et que la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$, donc diverge.

Plus précisément : par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ sur $[2, +\infty[$

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}$$

puis

$$\sum_{k=3}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_2^{\mathrm{N}} \frac{dt}{t\ln t} = \ln\ln \mathrm{N} - \ln\ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{k\ln k}$$

et enfin

$$-\ln\ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln \mathrm{N} \leqslant -\ln\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{\mathrm{N}\ln \mathrm{N}}$$

Donc $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n$ est bornée c'est-à-dire $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \mathrm{O}(1)$.

B.III.1.b. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n\ln n} - \ln\left(\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln n}\right) \\
&= \frac{1}{n\ln n} - \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right) \\
&= \frac{1}{n\ln n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).
\end{aligned}$$

B.III.1.c. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente car son terme général est équivalent quand $n \to +\infty$ à $\frac{1}{2n^2\ln n}$, terme général d'une série à termes positifs convergente.

Il en résulte que la *suite* (u_n) converge; si ℓ est sa limite on a $u_n = \ell + \mathrm{o}(1)$ soit

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + \ell + o(1).$$

B.III.2.

B.III.2.a. Montrons d'abord la transformation d'Abel. On a $a_n = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, en posant $\mathrm{A}_0 = 0$ d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}) b_n &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_n b_n - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{A}_n b_{n+1} \\ &= \mathrm{A}_{\mathrm{N}} b_{\mathrm{N}} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{A}_n (b_n - b_{n+1})\end{aligned}$$

On écrit ensuite, avec $a_n = \delta(n)\dfrac{\ln n}{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$,

$$\begin{aligned}\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} &= \sum_{k=2}^{n} \delta(k)\frac{\ln k}{k} \times \frac{1}{\ln k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\delta(k)\frac{\ln k}{k}\right) \times \frac{1}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) \\ &= \frac{\psi(n)}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{\ln(1+1/k)}{(\ln k)(\ln(k+1))}\right)\end{aligned}$$

B.III.2.b. On fait un simple développement asymptotique 'l'indication de l'énoncé est inutilement compliquée) :

$$\begin{aligned}\psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} &= \psi(k)\frac{\frac{1}{k} + \mathrm{O}(1/k^2)}{\ln^2(k)(1+\frac{1}{k} + \mathrm{O}(1/k^2))} \\ &= \frac{\psi(k)}{\ln^2 k} \times \left(\frac{1}{k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= \frac{\ln k + \mathrm{O}(1)}{\ln^2 k} \times \left(\frac{1}{k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \quad \text{(d'après le théorème de Mertens)} \\ &= \frac{1}{k \ln k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right).\end{aligned}$$

B.III.3. On a

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} + \frac{\psi(n)}{n}$$

avec $\psi(k)\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \dfrac{1}{k \ln k} + v_k$, où v_k est le terme général d'une série absolument convergente. En notant V_n sa somme partielle d'ordre n, il vient

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} + \mathrm{V}_{n-1} + \frac{\psi(n)}{n} = \ln \ln n + \ell + \mathrm{O}(1) + \mathrm{V}_{n-1} + \frac{\ln n + \mathrm{O}(1)}{n} = \ln \ln n + \lambda + + \mathrm{O}(1).$$

B.III.4. Écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n} &= \sum_{k=1}^{n-1} \pi(k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{\pi(n)}{n} \\ &= \frac{\pi(1)}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}(\pi(k) - \pi(k-1)) - \frac{\pi(n-1)}{n} + \frac{\pi(n)}{n} \\ &= \sum_{p \leqslant n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{n}(\pi(n) - \pi(n-1)) \\ &= \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

On sait que si u_n et v_n sont les termes de séries positives, équivalentes et divergentes, alors les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $\sum_{k=1}^{n} v_k$ sont équivalentes.

Supposons que $\dfrac{\pi(n)}{n} \sim \dfrac{C}{\ln n}$. Alors $\dfrac{\pi(n)}{n(n+1)} \sim \dfrac{C}{n \ln n}$, terme général d'une série divergente donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} \sim C \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} \sim C \ln\ln n$$

et puisque $\dfrac{\pi(n)}{n} \sim \dfrac{C}{n \ln n}$ on aura

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n} \sim C \ln\ln n\,.$$

Donc

$$\ln\ln n + \lambda + o(1) \sim C \ln\ln n \Longrightarrow C = 1\,.$$

IV. Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

B.IV.1. On sait que

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + \lambda + o(1), \text{ et } \sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{p} = \sum_{p \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{p} = \ln\ln(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lambda + o(1) = \ln\ln \sqrt{n} + \lambda + o(1)$$

En soustrayant, il vient :

$$\sum_{\sqrt{n} < p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln 2 + o(1)\,.$$

B.IV.2.

B.IV.2.a. Lorsque $n \in A(x)$, on a $n = mp \leqslant x$, donc $p \leqslant \dfrac{x}{m}$. Et puisque $p > \sqrt{n}$, alors $mp = n < p^2$, donc $m < p$.

Réciproquement, si $m < p \leqslant \dfrac{x}{m}$, alors $n = mp < p^2$ donc $p > \sqrt{n}$ donc $p = P^+(n)$ et $n = mp \leqslant x \Rightarrow n \in A(x)$.

B.IV.2.b. Supposons que $mp = m'p'$ et que $m \neq m'$. Par exemple que $m < m'$. Comme $p \wedge p' = 1$, il vient que p divise m', donc qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $m' = kp$. On a alors

$$m'^2 \leqslant m'p' = mp = \frac{mm'}{k} \leqslant x \Rightarrow km' \leqslant m$$

Ainsi $km' \leqslant m < m' \Rightarrow k \leqslant 1$. Donc $k = 1$ et $m = m'$ et $p = p'$.

B.IV.2.c. Cette question se déduit immédiatement des deux questions précédentes.

B.IV.2.d. D'après la question précédente, le cardinal de $A(x)$ est exactement égal au nombre de couples $(m, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{P}$ tels que $m < p \leqslant x/m$.

Or pour chaque nombre premier $p \leqslant x$, si $m \in \mathbb{N}^*$ vérifie $m < p \leqslant x/m$ on a $m < p$ donc $m \leqslant p - 1$ et $m \leqslant \dfrac{x}{p}$ donc $m \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{p} \right\rfloor$.

Réciproquement, si $1 \leqslant m \leqslant p - 1$ et $m \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{p} \right\rfloor$, on aura bien $m < p \leqslant x/m$. Donc pour chaque p premier $\leqslant x$, le nombre d'entiers m possible est $\min\left(p-1,\ \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right)$ ce qui prouve que

$$a(x) = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p - 1,\ \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right)\,.$$

B.IV.3.

B.IV.3.a. On a $p-1 \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{p} \right\rfloor$ si et seulement si $p-1 \leqslant \dfrac{x}{p}$ soit $p^2-p-x \leqslant 0$.

Cette équation admet une seule racine positive qui est $\varphi(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Donc , comme p est entier on a $p \leqslant \varphi(x)$. On vérifie immédiatement la réciproque.

B.IV.3.b. On a

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{4x}}{2} < \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} < \frac{\sqrt{4x}+1}{2} < \sqrt{x}+1$$

B.IV.3.c. On sait que $\min(p-1, \left\lfloor \dfrac{x}{p} \right\rfloor = p-1)$ si et seulement si $p \leqslant \varphi(x)$. Donc

$$a(x) = \sum_{p \leqslant \varphi(x)} (p-1) + \sum_{\varphi(x) < p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor.$$

- S'il n'existe pas de nombre premier dans l'intervalle $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$ alors, pour p premier on a $p \leqslant \varphi(x) \iff p \leqslant \sqrt{x}$ et $p > \varphi(x) \iff p > \sqrt{x}$, donc on obtient directement l'égalité demandée.
- S'il existe un nombre premier p_0 dans l'intervalle $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$ (forcément unique d'après **B.IV.3.b**), on a alors $\displaystyle\sum_{p \leqslant \varphi(x)} (p-1) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + (p_0-1)$ et $\displaystyle\sum_{\varphi(x) < p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{p_0} \right\rfloor \quad (*)$.

  Puisque $\sqrt{x} < p_0$ on a $x < p_0^2$ donc $\dfrac{x}{p_0} < p_0$ donc $\left\lfloor \dfrac{x}{p_0} \right\rfloor \leqslant p_0 - 1$ et puisque $p_0 \leqslant \varphi(x)$ on a $p_0 - 1 \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{p_0} \right\rfloor$ d'après **B.IV.3.a**.

  Finalement ici, $\left\lfloor \dfrac{x}{p_0} \right\rfloor = p_0 - 1$ de sorte que les deux termes dans $(*)$ se simplifient et on a encore l'égalité voulue.

B.IV.3.d. On a $\displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) \leqslant (\sqrt{x}-1)\pi(\lfloor \sqrt{x} \rfloor)$ (il y a en effet $\pi(\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ termes dans la somme, que l'on majore tous par $\sqrt{x}-1$).

De plus, on a vu dans la partie **A** que $\pi(n) = \mathrm{O}\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)$ donc $(\sqrt{x}-1)\pi(\lfloor \sqrt{x} \rfloor) = 0\left(\dfrac{x}{\ln x}\right) = o(x)$, ce qui établit le résultat demandé.

B.IV.3.e. On sait que

$$\sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leqslant \sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \frac{x}{p} = x \sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \frac{1}{p} \sim x \ln 2$$

et que

$$\sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \geqslant \sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \left(\frac{x}{p} - 1\right) = x \ln 2 + o(x) \sim x \ln 2$$

B.IV.3.f. Finalement

$$a(x) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \ln 2 + o(x) \sim x \ln 2$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆