CORRIGÉ DM N°4 (AIR 1993)

Première partie

1. a) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(\varphi) = \frac{1}{a + b\cos\varphi} = \frac{1}{a + b\,\dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}} = \frac{1}{a + b\,\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}} = \frac{2z}{bz^2 + 2az + b} \quad \text{avec } z = e^{i\varphi}.$$

Le polynôme $bX^2 + 2aX + b$ a pour discriminant réduit $\Delta' = a^2 - b^2 > 0$ car $|b| < |a|$ par hypothèse, donc ses racines sont $\beta_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ et $\beta_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.

$\left|\beta_1\right| = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{|b|}$ et $\left|\beta_2\right| = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{|b|}$ donc $\left|\beta_2\right| > \left|\beta_1\right|$, et puisque $\beta_1\beta_2 = 1$ (relations coefficients-racines), on aura $\left|\beta_1\right| < 1 < \left|\beta_2\right|$ et $\beta_2 = \beta_1^{-1}$.

Finalement, on a :

$$\boxed{f(\varphi) = \frac{2z}{B(z - \beta)(z - \beta^{-1})} \text{ avec } B = b,\ z = e^{i\varphi} \text{ et } \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \text{ tel que } |\beta| < 1.}$$

b) • Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $\beta e^{i\varphi} \neq 1$ (car $\left|\beta\right| < 1$), donc directement d'après le cours :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \beta^n e^{in\varphi} = \frac{1 - \beta^{N+1} e^{i(N+1)\varphi}}{1 - \beta e^{i\varphi}}.}$$

• Comme $\left|\beta\right| < 1$, on a $\lim\limits_{N \to +\infty} \beta^N = 0$, et puisque la suite $(e^{iN\varphi})$ est bornée, on aura $\lim\limits_{N \to +\infty} \beta^N e^{iN\varphi} = 0$, et par conséquent :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} \beta^n e^{in\varphi} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n e^{in\varphi} = \frac{1}{1 - \beta e^{i\varphi}}.}$$

• On obtient les autres résultats demandés en changeant simplement φ en $-\varphi$.

c) La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{2X}{B(X - \beta)(X - \beta^{-1})}$ est :

$$\frac{2X}{B(X - \beta)(X - \beta^{-1})} = \frac{2\beta}{B(\beta - \beta^{-1})(X - \beta)} + \frac{2\beta^{-1}}{B(\beta^{-1} - \beta)(X - \beta^{-1})} = \frac{2}{B(\beta - \beta^{-1})}\left(\frac{\beta}{X - \beta} - \frac{\beta^{-1}}{X - \beta^{-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{\beta}{X - \beta} - \frac{\beta^{-1}}{X - \beta^{-1}}\right).$$

On en déduit pour $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(\varphi) = \frac{1}{a + b\cos\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{\beta}{e^{i\varphi} - \beta} - \frac{\beta^{-1}}{e^{i\varphi} - \beta^{-1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{\beta e^{-i\varphi}}{1 - \beta e^{-i\varphi}} + \frac{1}{1 - \beta e^{i\varphi}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\beta e^{-i\varphi}\sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n e^{-in\varphi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n e^{in\varphi}\right) \quad \text{d'après } 1.b \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \beta^n e^{-in\varphi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n e^{in\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \beta^n \cos(n\varphi)\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\frac{1}{a+b\cos\varphi}=\mathrm{A}(a,b)\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\beta^n\cos n\varphi\right)\ \text{avec}\ \mathrm{A}(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}.}$$

d) Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ et $\varphi\in\mathbb{R}$; d'après ce qui précède :

$$\left|\frac{1}{a+b\cos\varphi}-\mathrm{A}(a,b)\left(1+2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\beta^n\cos n\varphi\right)\right|=\left|2\mathrm{A}(a,b)\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\beta^n\cos n\varphi\right|\leqslant 2\,|\mathrm{A}(a,b)|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\left|\beta\right|^n$$

(cette dernière série étant bien convergente puisque $\left|\beta\right|<1$).

On posera donc $u_\mathrm{N}=2\,|\mathrm{A}(a,b)|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\left|\beta\right|^n$; ce majorant u_N est alors indépendant de φ, et u_N est le reste d'ordre N d'une série convergente, donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}u_\mathrm{N}=0$.

e) Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente :

$$\left|\int_0^\pi\frac{1}{a+b\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi-\int_0^\pi\mathrm{A}(a,b)\left(1+2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\beta^n\cos n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\right|\leqslant\int_0^\pi u_\mathrm{N}\,\mathrm{d}\varphi=\pi u_\mathrm{N}$$

et puisque $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}u_\mathrm{N}=0$, on en déduit

$$\int_0^\pi\frac{1}{a+b\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\int_0^\pi\mathrm{A}(a,b)\left(1+2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\beta^n\cos n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\right).$$

Or :

$$\int_0^\pi\mathrm{A}(a,b)\left(1+2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\beta^n\cos n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=\pi\mathrm{A}(a,b)+2\mathrm{A}(a,b)\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\beta^n\underbrace{\int_0^\pi\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{=0}=\pi\mathrm{A}(a,b)$$

et finalement

$$\boxed{\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\varphi}{a+b\cos\varphi}=\pi\mathrm{A}(a,b)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.}$$

2. **a)** On connaît la factorisation : $\mathrm{X}^2-2\cos\alpha\mathrm{X}+1=(\mathrm{X}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(\mathrm{X}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$.
Puisque $\alpha\in]0,\pi[$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\neq\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ et $\sin\alpha\neq0$, et on a facilement :

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}\cos\alpha+1}=\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{X}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}-\frac{1}{\mathrm{X}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right).}$$

b) • D'après la question précédente, on a , avec $\left|\rho\right|<1$ et $0<\alpha<\pi$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^2-2\rho\cos\alpha+1}&=\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\alpha}\left(\frac{1}{\rho-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}-\frac{1}{\rho-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\alpha}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\alpha}\right)\quad\text{d'après 1.b}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}$$

toutes ces séries étant absolument convergentes puisque $\left|\rho\right|<1$.

• On a alors

$$\left|\frac{1}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\rho^n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right|=\left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\rho^n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right|\leqslant\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\frac{\left|\rho\right|^n}{\sin\alpha}=\frac{\left|\rho\right|^{\mathrm{N}+1}}{(1-\left|\rho\right|)\sin\alpha}$$

En conclusion :

$$\boxed{\left|\frac{1}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}-\sum_{n=0}^{N}\rho^n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right|\leqslant\frac{|\rho|^{N+1}}{(1-|\rho|)\sin\alpha}.}$$

3. **a)** • On a $a+b=2\big(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2\big)+2\rho(\mu_1-\mu_2)=2\big(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2+\rho(\mu_1-\mu_2)\big)$ donc

$$\boxed{a+b=2(1-2\rho\mu_2+\rho^2).}$$

• De même, $a-b=2\big(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2\big)-2\rho(\mu_1-\mu_2)=2\big(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2-\rho(\mu_1-\mu_2)\big)$ donc

$$\boxed{a-b=2(1-2\rho\mu_1+\rho^2).}$$

• Enfin, on a :

$$\begin{aligned}a+b\cos\varphi&=2\big(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2\big)+2\rho(\mu_1-\mu_2)\cos\varphi\\&=2\Big(1+\rho^2-\rho\left[\mu_1+\mu_2-(\mu_1-\mu_2)\cos\varphi\right]\Big)\\&=2(1-2\rho\xi+\rho^2).\end{aligned}$$

• Si $\rho=0$, l'identité de l'énoncé est facilement vérifiée.

• On supposera donc $0<\rho<1$ pour la suite.

On aura donc, puisque $\mu_1<\mu_2$, $b<0$.

D'autre part : le polynôme $X^2-2\mu_1X+1$ a pour discriminant réduit $\Delta'=\mu_1^2-1\leqslant 0$, il est donc de signe constant positif. De plus, il admet une racine réelle si et seulement si $\mu_1=1$, et dans ce cas cette racine est égale à 1. Puisque $\rho\in]0,1[$, on a $\rho^2-2\rho\mu_1+1>0$. De même, on a $\rho^2-2\rho\mu_2+1>0$. On en déduit $a+b>0$ et $a-b>0$, d'où $a^2-b^2>0$ et aussi $a>-b>0$ et ainsi :

$$\boxed{a>0,\ b\neq 0 \text{ et } |a|>|b| : \text{les hypothèses de la question 1 sont vérifiées.}}$$

• On peut donc appliquer les résultats de 1.b :

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

Or $\dfrac{1}{a+b\cos\varphi}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-2\rho\xi+\rho^2}$ et $\sqrt{(a+b)(a-b)}=\sqrt{4(1-2\rho\mu_1+\rho^2)(1-2\rho\mu_2+\rho^2)}$

donc l'égalité précédente s'écrit bien

$$\boxed{\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-2\rho\xi(\varphi)+\rho^2}=\frac{\pi}{\sqrt{(1-2\rho\mu_1+\rho^2)(1-2\rho\mu_2+\rho^2)}}.}$$

b) • On a par hypothèse $\xi=\dfrac{1}{2}\left[\mu_1+\mu_2-(\mu_1-\mu_2)\cos\varphi\right]$, d'où $\cos\varphi=\dfrac{2\xi-\mu_1-\mu_2}{\mu_2-\mu_1}$ et on en déduit :

$$\boxed{1+\cos\varphi=\frac{2(\xi-\mu_1)}{\mu_2-\mu_1}\quad\text{et}\quad 1-\cos\varphi=\frac{2(\mu_2-\xi)}{\mu_2-\mu_1}.}$$

• On a $\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)$ et $\sin\varphi\geqslant 0$ car $\varphi\in[0,\pi]$, et de plus $\mu_2>\mu_1$ par hypothèse, donc on déduit des formules précédentes :

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{2\sqrt{(\xi-\mu_1)(\mu_2-\xi)}}{\mu_2-\mu_1}.}$$

c) • Pour $\xi\in[\mu_1,\mu_2]$:

$$1-2\rho\xi+\rho^2=0\iff(1-\xi^2)+(\rho-\xi)^2=0\iff\big[\xi=\rho \text{ et } |\xi|=1\big]$$

ce qui est impossible puisque $0\leqslant\rho<1$.

L'application $f:\xi\longmapsto\dfrac{1}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\xi)(\xi-\mu_1)}}$ est donc bien définie sur $]\mu_1,\mu_2[$ et elle y est continue comme somme, produit, composées de telles fonctions. Elle est aussi à valeurs positives.

De plus, $f(\xi) \underset{\xi\to\mu_1^+}{\sim} \dfrac{1}{(1-2\rho\mu_1+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\mu_1)(\xi-\mu_1)}}$ et $\xi \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\xi-\mu_1}}$ est intégrable au voisinage de μ_1^+

et de même $f(\xi) \underset{\xi\to\mu_2^-}{\sim} \dfrac{1}{(1-2\rho\mu_2+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\xi)}}$ avec aussi $\xi \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mu_2-\xi}}$ intégrable au voisinage de μ_2^-.

D'après les théorèmes sur les comparaisons d'intégrales de fonctions positives, on peut conclure :

$$\boxed{\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\xi)(\xi-\mu_1)}} \text{ converge.}}$$

• L'application $\xi : \varphi \mapsto \dfrac{1}{2}\left[\mu_1+\mu_2-(\mu_1-\mu_2)\cos\varphi\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et $\xi'(\varphi) = \dfrac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)\sin\varphi$ est strictement négative sur $]0,\pi[$. Il s'agit donc d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,\pi[$ sur $]\xi(\pi),\xi(0)[=]\mu_1,\mu_2[$. On peut donc effectuer dans l'intégrale impropre précédente le changement de variable $\xi = \xi(\varphi)$, ce qui ne changera pas la nature de l'intégrale, et on obtient, compte tenu des calculs précédents :

$$\begin{aligned}
\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\xi)(\xi-\mu_1)}} &= \int_{\pi}^{0} \frac{\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\xi)(\xi-\mu_1)}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-2\rho\xi+\rho^2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\rho\mu_1+\rho^2)(1-2\rho\mu_2+\rho^2)}}
\end{aligned}$$

d) Soient $\rho \in [0,1[$ et $\theta \in]0,\pi[$. Puisque $-1 < \cos\theta < 1$, on peut appliquer ce qui précède avec $\mu_1 = \cos\theta$ et $\mu_2 = 1$. On obtient :

$$(*) \quad \int_{\cos\theta}^{1} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(1-\xi)(\xi-\cos\theta)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)(1-2\rho+\rho^2)}} = \frac{\pi}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}}$$

L'application cos est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,\theta[$ sur $]\cos\theta,1[$; on peut donc faire dans l'intégrale précédente le changement de variable $\xi = \cos\alpha$ ce qui donne :

$$\int_{\cos\theta}^{1} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(1-\xi)(\xi-\cos\theta)}} = \int_{\theta}^{0} \frac{-\sin\alpha\, d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sqrt{(1-\cos\alpha)(\cos\alpha-\cos\theta)}}$$

l'intégrale obtenue étant encore convergente.
Or $1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ et $\dfrac{\alpha}{2} \in \left]0,\frac{\theta}{2}\right[\subset \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$. L'égalité précédente devient donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\cos\theta}^{1} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(1-\xi)(\xi-\cos\theta)}} &= \int_0^{\theta} \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} \\
&= \int_0^{\theta} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} \\
&= 2\int_0^{\theta} \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}
\end{aligned}$$

et compte tenu de la relation $(*)$ on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}}.}$$

e) Ici $\rho \in]-1,1[$ et $\alpha \in]0,\pi[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\rho^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right| \leqslant |\rho|^n$, et la série $\sum |\rho|^n$ converge (série géométrique), donc

$$\boxed{\text{la série } \sum \rho^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \text{ est absolument convergente.}}$$

• On a vu à la question 2.b que $\dfrac{1}{\rho^2 - 2\rho\cos\alpha + 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$, d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} &= (1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\rho^n\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\\
&= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\rho^n\sin(n+1)\alpha - \rho^{n+1}\sin(n+1)\alpha\right]\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\sin(n+1)\alpha - \sum_{n=0}^{+\infty}\rho^{n+1}\sin(n+1)\alpha\right) \text{ (les deux séries étant absolument convergentes)}\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\sin(n+1)\alpha - \sum_{n=1}^{+\infty}\rho^{n}\sin n\alpha\right) \text{ (changement d'indice } n+1\to n \text{ dans la seconde série)}\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\alpha + \sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\left[\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha\right]\right)\\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}2\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right) \text{ (formule connue } \sin p - \sin q = \ldots)
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,.}$$

f) D'après ce qui précède, on a immédiatement :

$$\left|\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} - \sum_{n=0}^{N}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}|\rho|^n = \frac{|\rho|^{N+1}}{1-|\rho|}$$

et le majorant est bien indépendant de α et tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$.

g) • Soit $n \in \mathbb{N}$. $g : \alpha \mapsto \dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)}}$ est continue sur $[0,\theta[$, et pour tout $\alpha \in [0,\theta[$ on a $|g(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}$.

Or $\cos\alpha - \cos\theta \underset{\alpha\to\theta^-}{\sim} -\sin\theta(\alpha-\theta)$ puisque $\sin\theta \neq 0$ (en effet, pour une fonction h dérivable en un point x_0 et de dérivée non nulle en ce point, on a $h(x) - h(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} h'(x_0)(x-x_0)$), donc il existe une constante K telle que $\dfrac{1}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} \underset{\alpha\to\theta^-}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{\theta-\alpha}}$.

La fonction $\alpha \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\theta-\alpha}}$ étant positive et intégrable au voisinage de θ^-, il en est de même de $\alpha \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}$ puis de g.

En conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,\mathrm{d}\alpha \text{ converge, et } v_n \text{ est bien définie.}}$$

• On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \left|v_n\right| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,\mathrm{d}\alpha\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\right|\mathrm{d}\alpha \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}$$

et on conclut :

$$\boxed{\text{En posant } \mathrm{M} = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\text{, on a } \left|v_n\right| \leqslant \mathrm{M} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.}$$

• Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. D'après 3.d, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\theta \frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}$

donc en notant $\Delta_\mathrm{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \rho^n \left[\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,\mathrm{d}\alpha\right]$:

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_\mathrm{N}\right| &= \left|\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \left(\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\right| \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \left|\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\left|\rho\right|^{\mathrm{N}+1}}{1-\left|\rho\right|}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} \quad \text{d'après 3.f}
\end{aligned}$$

Finalement, $\left|\Delta_n\right| \leqslant \mathrm{M}\dfrac{\left|\rho\right|^{\mathrm{N}+1}}{1-\left|\rho\right|}$ et par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left|\Delta_\mathrm{N}\right| = 0.}$$

4. **a)** • On a vu en 2.a que le polynôme $\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}\cos\theta+1$ n'admet pas de racine réelle pour $\theta\in]0,\pi[$, et est donc toujours strictement positif, on en déduit, d'après les théorèmes usuels, que

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

• Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété pour $n\in\mathbb{N}$: « $g^{(n)}(0) = n!\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ où P_n est un polynôme de degré n » et démontrons $\mathscr{P}(n)$ par récurrence sur n.

⊛ Pour $n=0$, $g(0)=1=0!\mathrm{P}_0(\cos\theta)$ avec $\mathrm{P}_0=1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

⊛ Pour $n=1$, $g'(x) = \dfrac{\cos\theta}{(1-2x\cos\theta+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc $g'(0)=\cos\theta=1!\mathrm{P}_1(\cos\theta)$ avec $\mathrm{P}_1=\mathrm{X}$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

⊛ Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathrm{P}(n-1)$ démontrées. On vient de voir que

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ (x^2-2x\cos\theta+1)g'(x) = (\cos\theta-x)g(x)$$

donc en dérivant cette relation n fois par la formule de Leibniz, on obtient, pour $n\geqslant 2$:

$$(x^2-2x\cos\theta+1)g^{(n+1)}(x)+\binom{n}{1}(2x-2\cos\theta)g^{(n)}(x)+\binom{n}{2}2g^{(n-1)}(x) = (\cos\theta-x)g^{(n)}(x)+\binom{n}{1}(-1)g^{(n-1)}(x)$$

soit

$$(x^2-2x\cos\theta+1)g^{(n+1)}(x)+2n(x-\cos\theta)g^{(n)}(x)+n(n-1)g^{(n-1)}(x) = (\cos\theta-x)g^{(n)}(x)-ng^{(n-1)}(x)$$

cette formule restant vraie pour $n=1$ puisque le terme $n(n-1)$ s'annule. En faisant ensuite $x=0$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(0)-2n\cos\theta\, g^{(n)}(0)+n(n-1)g^{(n-1)}(0)=\cos\theta\, g^{(n)}(0)-ng^{(n-1)}(0)$$

et donc, en utilisant $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$:

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(0)&=(2n+1)\cos\theta\, g^{(n)}(0)-n^2g^{(n-1)}(0)\\&=(2n+1)\cos\theta\, n!\mathrm{P}_n(\cos\theta)-n^2(n-1)!\mathrm{P}_{n-1}(\cos\theta)\\&=(n+1)!\left(\frac{2n+1}{n+1}\cos\theta\mathrm{P}_n(\cos\theta)-\frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}(\cos\theta)\right)\\&=(n+1)!\mathrm{P}_{n+1}(\cos\theta)\end{aligned}$$

en posant

$$\mathrm{P}_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}\mathrm{XP}_n-\frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}$$

Ce polynôme étant évidemment de degré $n+1$, cela achève la récurrence.

Autre démonstration possible :

Cette démonstration est peut-être plus directe, mais n'établit pas la relation de récurrence entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1}, qui d'ailleurs ne figurait pas dans l'énoncé initial et que j'ai rajoutée...

On procède également par récurrence, en considérant ici la propriété

$\mathscr{P}(n)$: « $\forall x\in\mathbb{R},\ g^{(n)}(x)=\dfrac{\mathrm{Q}_n(x)}{(x^2-2x\cos\theta+1)^{n+\frac12}}$ avec $\mathrm{Q}_n\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le coefficient de X^k $(0\leqslant k\leqslant n)$ dans Q_n étant un polynôme en $\cos\theta$ de degré $\leqslant n-k$. »

⊛ Pour $n=0$, la propriété est vérifiée, avec $\mathrm{Q}_0=1$.

⊛ Supposons $\mathscr{P}(n)$ vérifiée à un rang $n\in\mathbb{N}$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(x)&=\frac{\mathrm{Q}_n'(x)}{(x^2-2x\cos\theta+1)^{n+\frac12}}-\left(n+\frac12\right)(2x-2\cos\theta)\frac{\mathrm{Q}_n(x)}{(x^2-2x\cos\theta+1)^{n+\frac32}}\\&=\frac{(x^2-2x\cos\theta+1)\mathrm{Q}_n'(x)-(2n+1)(x-\cos\theta)\mathrm{Q}_n(x)}{(x^2-2x\cos\theta+1)^{n+\frac32}}\end{aligned}$$

Posons alors $\mathrm{Q}_{n+1}=(\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}\cos\theta+1)\mathrm{Q}_n'-(2n+1)(\mathrm{X}-\cos\theta)\mathrm{Q}_n$. Il est clair que Q_{n+1} est un polynôme de degré $\leqslant n+1$ et que les coefficients de Q_{n+1} sont tous des polynômes en $\cos\theta$; en examinant le coefficient de X^k dans Q_{n+1}, on vérifie également qu'il s'agit bien d'un polynôme en $\cos\theta$ de degré $\leqslant n+1-k$ (à faire en détail...) ; donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

De plus, le terme constant de Q_n est égal à $\mathrm{Q}_n(0)=g^{(n)}(0)$, et d'après la relation ci-dessus :

$$\mathrm{Q}_{n+1}(0)=\mathrm{Q}_n'(0)+(2n+1)\cos\theta\mathrm{Q}_n(0)$$

ce qui permet d'obtenir par récurrence que $\mathrm{Q}_n(0)$ est de la forme $\mathrm{A}(\cos\theta)$ avec $\mathrm{A}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré exactement n (en effet, $\mathrm{Q}_n'(0)$ est le coefficient de X dans Q_n, donc est un polynôme en $\cos\theta$ de degré $\leqslant n-1$).

En posant alors $\mathrm{P}_n=\dfrac{\mathrm{A}}{n!}$, on a donc prouvé que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ g^{(n)}(0)=n!\mathrm{P}_n(\cos\theta)\text{ où }\mathrm{P}_n\text{ est un polynôme de degré }n.}$$

b) D'après 3.g, on a, pour tout $\rho\in]-1,1[$ et tout $\theta\in]0,\pi[$:

$$(**)\quad g(\rho)=\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos\left(n+\frac12\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,\mathrm{d}\alpha\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n v_n\,.$$

Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. Pour $x\in]-1,1[$, on a $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}v_nx^n+\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}v_nx^n$, et

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}v_nx^n\right|\leqslant\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}|v_n|\,|x|^n\leqslant\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}|x|^n=\frac{\mathrm{M}|x|^{\mathrm{N}+1}}{1-|x|}\quad\text{(toujours d'après 3.d)}$$

donc lorsque x tend vers 0, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n x^n = o(x^N)$, et on a donc $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n x^n + o(x^N)$. Par unicité du développement limité, et d'après la formule de Taylor-Young (g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$), on a donc $v_N = \dfrac{g^{(N)}(0)}{N!} = P_N(\cos\theta)$, ceci pour tout $N \in \mathbb{N}$ et on conclut :

$$\boxed{\forall \rho \in]-1,1[\ ,\ g(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n P_n(\cos\theta).}$$

Rem pour les 5/2 : on pouvait obtenir plus rapidement ce résultat en remarquant que l'égalité $(**)$ prouve que g est développable en série entière au voisinage de 0, ce qui permet d'affirmer directement que les coefficients de ce développement sont bien les $\dfrac{g^n(0)}{n!}$...

c) Soit $\theta \in]0,\pi[$, $\rho \in]-1,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On a vu en 3.g que :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N} \rho^n v_n \right| \leqslant M \frac{|\rho|^{N+1}}{1-|\rho|}$$

avec $M = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\theta \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}$, et on vient d'établir $v_n = P_n(\cos\theta)$ donc

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N} \rho^n P_n(\cos\theta) \right| \leqslant M \frac{|\rho|^{N+1}}{1-|\rho|}$$

En choisissant $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ et $|\rho| \leqslant \varepsilon_0$, on aura alors

$$\boxed{\forall \rho \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[\ ,\ \left| \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N} \rho^n P_n(\cos\theta) \right| \leqslant 2M|\rho|^{N+1}.}$$

<u>ce qui n'est tout à fait le résultat demandé, car M dépend de θ !</u>

Rem : En fait, on peut prouver que lorsque $\theta \longrightarrow \pi$, M tend vers $+\infty$. La méthode ci-dessus est donc trop grossière pour obtenir un majorant valable pour tout $\theta \in]0,\pi[$.

Cependant : Cette inégalité ne servira que dans la question II.2.a, et on verra qu'on peut se contenter de la démontrer pour $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ (avec cette fois-ci un majorant indépendant de θ).

On a en effet pour $\alpha \in]0,\theta[$: $\cos\alpha - \cos\theta = 2\sin\dfrac{\alpha+\theta}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2}$. En utilisant alors l'inégalité classique $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a si $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$: $\cos\alpha - \cos\theta \geqslant \dfrac{2(\alpha+\theta)(\theta-\alpha)}{\pi^2}$ et on en déduit :

$$M = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} \leqslant \int_0^\theta \frac{d\alpha}{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}} = \left[\mathrm{Arc}\sin\frac{\alpha}{\theta}\right]_0^\theta = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\forall \rho \in \left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[\ ,\ \forall N \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall \theta \in \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right]\ ,\ \left| \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n P_n(\cos\theta) \right| \leqslant \pi|\rho|^N.}$$

Seconde partie

1. a) h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ comme composée de telles fonctions. De plus, pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{h^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} \text{ et } h^{(n)}(0)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.}$$

b) D'après la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à h entre 0 et x, on a pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$:

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{x^n}{n!}h^{(n)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{\mathrm{N}-1}}{(\mathrm{N}-1)!}h^{(\mathrm{N})}(t)\,\mathrm{d}t$$

Si $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$, pour tout $t\in[0,x]$ (ou $[x,0]$) on aura $1-t\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ donc $(1-t)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{N}}\in\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{N}},\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{N}}\right]$ d'où $0\leqslant h^{(\mathrm{N})}(t)\leqslant\dfrac{(2\mathrm{N})!}{2^{2\mathrm{N}}\mathrm{N}!}2^{\frac{1}{2}+\mathrm{N}}=\sqrt{2}\dfrac{(2\mathrm{N})!}{2^{\mathrm{N}}\mathrm{N}!}$.

On déduit donc de la formule de Taylor ci-dessus :

$$\left|h(x)-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{x^n}{n!}h^{(n)}(0)\right|\leqslant\sqrt{2}\frac{(2\mathrm{N})!}{2^{\mathrm{N}}\mathrm{N}!}\left|\int_0^x\frac{(x-t)^{\mathrm{N}-1}}{(\mathrm{N}-1)!}\,\mathrm{d}t\right|=\sqrt{2}\frac{(2\mathrm{N})!}{2^{\mathrm{N}}\mathrm{N}!^2}|x|^{\mathrm{N}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in\left]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right[,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{x^n}{n!}h^{(n)}(0)\right|\leqslant\mathrm{K}\frac{(2\mathrm{N})!}{2^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}!)^2}|x|^{\mathrm{N}} \text{ avec } \mathrm{K}=\sqrt{2}.}$$

c) $\forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$, $\left|\rho(2\cos\theta-\rho)\right|\leqslant\left|\rho\right|(2+\left|\rho\right|)$; si on suppose $\left|\rho\right|\leqslant\dfrac{1}{5}$ (par exemple) on aura $\left|\rho(2\cos\theta-\rho)\right|\leqslant\dfrac{11\left|\rho\right|}{5}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

On peut alors appliquer 1.b à $x=\rho(2\cos\theta-\rho)$ et on aura donc $\forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\left|\rho\right|\leqslant\frac{1}{5}\Longrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}}-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^n}{n!}h^{(n)}(0)\right|\leqslant\mathrm{C_N}\left|\rho\right|^{\mathrm{N}} \text{ avec } \mathrm{C_N}=\mathrm{K}\frac{(2\mathrm{N})!}{2^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}!)^2}\left(\frac{11}{5}\right)^{\mathrm{N}}.}$$

2. **a)** • D'après I.4.c et II.1.b, pour $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ et $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}\times]0,\pi[$ tel que $\left|\rho\right|\leqslant\min\{\varepsilon_0,\varepsilon\}$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^n}{n!}h^{(n)}(0)\right|&=\left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)-g(\rho)+g(\rho)-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^n}{n!}h^{(n)}(0)\right|\\&\leqslant\left|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)-g(\rho)\right|+\left|g(\rho)-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^n}{n!}h^{(n)}(0)\right|\\&\leq\mathrm{D}\left|\rho\right|^{\mathrm{N}}+\mathrm{C_N}\left|\rho\right|^{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

Lorsque ρ tend vers 0, on a donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)-\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^n}{n!}h^{(n)}(0)=\mathrm{O}(\rho^{\mathrm{N}})$, et par unicité du développement limité, les coefficients de ρ^n, $0\leqslant n\leqslant\mathrm{N}-1$, sont les mêmes dans $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ et dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^i}{i!}h^{(i)}(0)$ (j'ai changé le nom des indices pour plus de lisibilité par la suite).

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^i}{i!}h^{(i)}(0)&=\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{h^{(i)}(0)}{i!}\rho^i\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}2^k\cos^k\theta(-1)^{i-k}\rho^{i-k}\\&=\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{h^{(i)}(0)}{i!}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}2^k\cos^k\theta(-1)^{i-k}\rho^{2i-k}\end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}-1$, on obtient dans cette somme un terme en ρ^n lorsque $2i-k=n$, c'est-à-dire $k=2i-n$, et comme k varie de 0 à i, on obtient un tel terme seulement lorsque $\dfrac{n}{2} \leqslant i \leqslant n$.

On en déduit le coefficient de ρ^n : $\displaystyle\sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}\binom{i}{2i-n}2^{2i-n}(-1)^{i-(2i-n)}\cos^{2i-n}\theta$. et ainsi

$$\forall\theta\in]0,\pi[\,,\ \mathrm{P}_n(\cos\theta)=\sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}\binom{i}{2i-n}2^{2i-n}(-1)^{n-i}\cos^{2i-n}\theta$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}\binom{i}{2i-n}2^{2i-n}(-1)^{n-i}\mathrm{X}^{2i-n}$ coïncide donc avec P_n en tous les réels de la forme $\cos\theta$ pour $0<\theta<\pi$. Puisqu'il y a une infinité de tels réels, ces deux polynômes sont donc égaux.

Rem : On a ici utilisé la majoration de I.4.c, indépendante de θ, que l'on a seulement démontrée pour $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, mais cela ne change rien à cette conclusion.

Finalement, on a trouvé :

$$\boxed{\mathrm{P}_n=\sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}\binom{i}{2i-n}2^{2i-n}(-1)^{n-i}\mathrm{X}^{2i-n}.}$$

• Si on veut être perfectionniste, on peut essayer d'arranger un peu la formule ci-dessus, en remplaçant les $h^{(i)}(0)$ par leur valeur calculée au début :

$$\mathrm{P}_n=\sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n} \frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2}\binom{i}{2i-n}2^{2i-n}(-1)^{n-i}\mathrm{X}^{2i-n}$$

Ce polynôme a bien la forme demandée, avec a_n le coefficient de X^n, c'est-à-dire le terme obtenu pour $i=n$:

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\binom{n}{n}2^n \text{ soit } \boxed{a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.}$$

• Pour $1\leqslant k\leqslant \dfrac{n}{2}$, $a_nb_{n,k}$ est alors le coefficient de X^{n-2k}, c'est-à-dire le terme obtenu pour $i=n-k$, ce qui donne :

$$a_nb_{n,k}=\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^{2n-2k}\left[(n-k)!\right]^2}\binom{n-k}{n-2k}2^{n-2k} \text{ puis } b_{n,k}=(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(2n)!}\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2\binom{n-k}{n-2k}$$

ce qui peut aussi s'écrire, après quelques calculs :

$$\boxed{\text{Pour } 1\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}\,,\ b_{n,k}=(-1)^k\frac{\dbinom{n}{2k}\dbinom{n}{k}}{\dbinom{2n}{2k}}.}$$

b) On a donc :

$$\mathrm{P}_n(x)=a_n\left(x^n+\sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}b_{n,k}x^{n-2k}\right)$$

et

$$\mathrm{P}_{n+1}=a_{n+1}\left(x^{n+1}+\sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)}b_{n+1,k}x^{n+1-2k}\right)$$

Donc

$$\mathrm{P}'_{n+1}(x)=a_{n+1}\left((n+1)x^{n+1}+\sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)}(n+1-2k)b_{n+1,k}x^{n+1-2k}\right)$$

Mais si n est pair, $\mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right)=\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$, et lorsque n est impair, le coefficient $n+1-2k$ est nul lorsque $k=\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$, et on a aussi $\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)-1=\mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

On peut donc toujours écrire :

$$\mathrm{P}'_{n+1}(x) = a_{n+1}\left((n+1)x^{n+1} + \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(n+1-2k)b_{n+1,k}x^{n+1-2k}\right)$$

D'autre part :

$$x\mathrm{P}'_n(x) + (n+1)\mathrm{P}_n(x) = a_n\left(nx^n + \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(n-2k)b_{n,k}x^{n-2k} + (n+1)x^n + \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(n+1)b_{n,k}x^{n-2k}\right)$$

$$= (2n+1)a_n x^n + a_n\sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(2n+1-2k)b_{n,k}x^{n-2k}$$

et il ne reste plus qu'à vérifier, à l'aide des expressions trouvées plus haut, que

$$(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n \quad \text{et} \quad (n+1-2k)b_{n+1,k}a_{n+1} = (2n+1-2k)b_{n,k}a_n \quad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$

pour démontrer

$$\boxed{\mathrm{P}'_{n+1}(x) - x\mathrm{P}'_n(x) = (n+1)\mathrm{P}_n(x).}$$

Troisième partie

1. Pour $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t = \tan\dfrac{\varphi}{2} \Longleftrightarrow \varphi = 2\,\mathrm{Arc}\tan t$ donc $\mathrm{d}\varphi = 2\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2+\cos\varphi} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2}$$

On peut donc la calculer :

$$\mathrm{I} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. En notant I1 et I2 au lieu de I' et J', on peut écrire en MAPLE :

```
I1 := N->1/N*add(2.0/(3+(i/N)^2),i=1..N);
```

```
I2 := N->1/N*add(2.0/(3+(i/N)^2),i=0..N-1);
```

Notez l'utilisation de 2.0 à la place de 2 pour forcer MAPLE à faire les calculs en flottant (et non sous forme fractionnaire). Notez aussi l'utilisation de la fonction `add` qui permet d'éviter d'écrire une boucle.

3. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{2}{3+t^2}$ étant décroissante sur $[0,1]$, on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{1}{\mathrm{N}}f\left(\frac{i}{\mathrm{N}}\right) \leqslant \int_{\frac{i-1}{\mathrm{N}}}^{\frac{i}{\mathrm{N}}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}f\left(\frac{i-1}{\mathrm{N}}\right)$$

d'où en sommant : $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}'_\mathrm{N} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2} \leqslant \mathrm{I}''_\mathrm{N}$.

On va donc calculer les valeurs successives de I'_N et I''_N pour $\mathrm{N} = 1, 2, \ldots$ jusqu'à avoir $\mathrm{I}''_\mathrm{N} - \mathrm{I}'_\mathrm{N} \leqslant 10^{-\mathrm{M}}$, et l'approximation de I que l'on proposera sera alors $\dfrac{\mathrm{I}'_\mathrm{N} + \mathrm{I}''_\mathrm{N}}{2}$.

En remarquant que pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}''_\mathrm{N} - \mathrm{I}'_\mathrm{N} = \dfrac{1}{\mathrm{N}}(f(0) - f(1)) = \dfrac{1}{6\mathrm{N}}$, il suffit donc de calculer I'_N et I''_N pour $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\dfrac{10^\mathrm{M}}{6}\right) + 1$. On a alors $\dfrac{\mathrm{I}'_\mathrm{N} + \mathrm{I}''_\mathrm{N}}{2} = \mathrm{I}'_\mathrm{N} + \dfrac{1}{12\mathrm{N}}$, on en déduit le programme MAPLE donnant les six approximations demandées :

```
Digits := 20:
for M from 1 to 6 do
   N:=trunc(10^M/6)+1;
   printf("Valeur approchée de I à 10^(-%d) près : %0.10f\n",M,evalf(I1(N)+1/12/N));
od:

  Valeur approchée de I à 10^(-1) près : 0.5993589744
  Valeur approchée de I à 10^(-2) près : 0.6045276942
  Valeur approchée de I à 10^(-3) près : 0.6045990411
  Valeur approchée de I à 10^(-4) près : 0.6045997806
  Valeur approchée de I à 10^(-5) près : 0.6045997880
  Valeur approchée de I à 10^(-6) près : 0.6045997881
```

Remarque : ce programme est très loin d'être optimal, il effectue $166\,667$ boucles pour calculer I'_{10^6} !

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆