SUITES ADJACENTES CONVERGEANT VERS $\ln x$ (d'après ESIM 1990, Maths appliquées)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, soient (S_n), (T_n), (C_n) les suites réelles définies par les relations de récurrence suivantes :

$$(1) \quad S_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad C_0 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} \quad S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{C_n}.$$

1. On pose $\varphi = \ln x$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $S_n = 2^n \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2^n}$ et $T_n = 2^n \operatorname{th} \frac{\varphi}{2^n}$.

b) En déduire que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes et convergent vers $\ln x$.
Donner de plus un encadrement de $\ln x$ à l'aide de S_n et T_n.

c) Dans le cas où x est égal à 2, donner un programme en MAPLE, utilisant (1) et permettant d'obtenir les valeurs S_n et T_n lorsque n est élément de l'intervalle $[0, 10]$.

2. Dans cette question, on considère les suites $\left(\frac{aS_n + bT_n}{a+b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a + b \neq 0$.

a) Montrer que les suites (W_n) définies par $W_n = \frac{aS_n + bT_n}{a+b}$ sont convergentes vers $\ln x$ et donner un développement limité de $\ln x - W_n$ à la précision $\frac{1}{16^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer qu'il existe un choix de (a,b), un réel λ et une suite, que l'on notera u_n, tels que $u_n - \ln x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{16^n}$.
Préciser a, b, λ et u_n.

3. Dans cette question, on accélère la convergence de la suite (S_n) par la méthode de Richardson. On est ainsi conduit à construire les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) vérifiant :

$$x_n = \frac{4S_{n+1} - S_n}{3} \quad y_n = \frac{16x_{n+1} - x_n}{15} \quad z_n = \frac{64y_{n+1} - y_n}{63}.$$

a) En utilisant le développement limité de $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 9 au voisinage de 0, montrer qu'il existe des constantes α, β, γ telles que :

$$x_n = \ln x + \frac{\alpha}{16^n} + \frac{\beta}{64^n} + \frac{\gamma}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$$

puis des constantes α', β' telles que $y_n = \ln x + \frac{\alpha'}{64^n} + \frac{\beta'}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$
ainsi qu'une constante α'' telle que $z_n = \ln x + \frac{\alpha''}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$.
On ne demande pas de déterminer les constantes α, β, γ, α', β', α''.

b) Lorsque x est égal à 2, écrire un programme MAPLE donnant sous forme de tableau, lorsque n est élément de $[1, 4]$ les valeurs correspondantes des suites x_n, y_n et z_n, calculées à partir de celles de S_n.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆