DS°8 (le 02/04/2011)

UN problème au choix ...

Problème 1 : CCP PSI 1999

Notations et objectifs

On désigne par $\mathscr{C}_{2\pi}$ (resp. $\mathscr{CM}_{2\pi}$) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques continues (resp. continues par morceaux).

Lorsque $\varphi \in \mathscr{CM}_{2\pi}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note $c_k(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ le coefficient de Fourier d'indice k de φ.

Lorsque $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_k = a_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_k = b_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$$

les a_k et les b_k sont les coefficients de Fourier réels de φ et on appelle série de Fourier réelle de φ la série :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k\geqslant 1} \left[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\right]$$

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z et $|z|$ le module de z.

Cette épreuve comporte trois parties indépendantes les unes des autres.

Dans la partie I, on étudie et on explicite une fonction f définie comme somme une série trigonométrique.

Dans la partie II, on étudie une condition suffisante portant sur la fonction φ pour que les sommes $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left|c_k(\varphi)\right|$ soient majorées indépendamment de n.

Dans la partie III, on étudie les valeurs propres d'une matrice $\mathrm{M}_n(\varphi)$ construite à partir des coefficients $c_k(\varphi)$.

PARTIE I

I.1/ On considère l'équation différentielle : (E) $\quad y'' + y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta\cos t$ où α, β, γ, δ désignent quatre constantes réelles.

Déterminer les solutions réelles de l'équation (E) :

I.1.1/ lorsque $\delta = 0$,

I.1.2/ lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

I.1.3/ dans le cas général.

I.2/ Soit F l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{pour tout } t \in]-\pi, \pi] \ : \ \mathrm{F}(t) = t^2$$

I.2.1/ Déterminer la série de Fourier réelle de F.

I.2.2/ Étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier réelle de F et préciser sa somme.

I.3/ On désigne respectivement par f, g et h les trois fonctions définies pour t réel par :

$$f(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(k^2-1)} \cos(kt)$$

$$g(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2-1)} \sin(kt)$$

$$h(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1} \cos(kt)$$

lorsque les séries convergent.

I.3.1/ Montrer que les fonctions f, g, h sont définies sur $\mathbb{R}$.

I.3.2/ Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' et f'' en fonction de g et h.

I.3.3/ Quelle est la valeur de $f'(0)$?

I.3.4/ Calculer explicitement la valeur de $f''(\pi)$.

I.3.5/ Déduire de ce qui précède, en particulier de I.2, que la fonction f est solution sur $]-\pi, \pi]$ de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y'' + y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta \cos t$$

pour des constantes α, β, γ, δ que l'on explicitera.

I.3.6/ Déduire de I.3.5/ que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ et donner l'expression explicite de $f'''(t) + f'(t)$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.

I.3.7/ La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

I.3.8/ Expliciter $f(t)$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

PARTIE II

Dans cette partie, on désigne par φ une fonction quelconque de $\mathscr{CM}_{2\pi}$, et on pose :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} \left| c_k(\varphi) \right|$$

L'objet de cette partie est l'étude d'une condition suffisante de convergence de la suite $(S_n(\varphi))_{n \in \mathbb{N}}$.

II.1/ On considère l'application φ_1 2π-périodique, impaire, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(t) = \pi \ \text{ pour } t \in]0, \pi[$$

La suite $(S_n(\varphi_1))$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par φ une fonction appartenant à $\mathscr{C}_{2\pi}$ et l'on suppose que φ vérifie la condition :

$$(\mathscr{L}) \quad \text{« il existe } A_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } s \in]0,1] \text{ tels que, pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ on ait } \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \leqslant A_1 \left|x - y\right|^s \text{ »}$$

Étant donné $h \in \mathbb{R}_+^*$, on associe à φ la fonction ψ_h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi_h(t) = \varphi(t+h) - \varphi(t-h)$$

II.2/ Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ψ_h appartient à $\mathscr{C}_{2\pi}$.

II.3/ Exprimer le coefficient de Fourier $c_k(\psi_h)$ en fonction de $c_k(\varphi)$.

II.4/ Justifier, pour tout $n \in \mathrm{N}$, l'inégalité :

$$\sum_{k=-n}^{n} \sin^2(kh) \left|c_k(\varphi)\right|^2 \leqslant \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\psi_h(t)\right)^2 \, \mathrm{d}t$$

II.5/ En déduire qu'il existe $\mathrm{A}_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait l'inégalité :

$$\sum_{k=-n}^{n} \sin^2(kh) \left|c_k(\varphi)\right|^2 \leqslant \mathrm{A}_2 \cdot h^{2s}$$

II.6/ Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère les ensembles I_p définis par

$$\mathrm{I}_p = \left\{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } 2^{p-1} \leqslant |k| \leqslant 2^p - 1\right\}$$

et on note $\mathrm{H}(p)$ le cardinal de I_p.

II.6.1/ Expliciter $\mathrm{H}(p)$.

II.6.2/ Montrer que pour tout $k \in \mathrm{I}_p$ on a l'égalité :

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right) \geqslant \frac{1}{2}$$

II.6.3/ Justifier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$\left(\sum_{k\in \mathrm{I}_p} \left|c_k(\varphi)\right|\right)^2 \leqslant \mathrm{H}(p) \sum_{k\in \mathrm{I}_p} \left|c_k(\varphi)\right|^2$$

II.6.4/ On suppose que $s > \dfrac{1}{2}$. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{\left(\mathrm{H}(p)\right)^{1/2}}{\left(2^{p+1}\right)^s}$; déduire alors de tout ce qui précède que la suite $(\mathrm{S}_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis préciser sa nature.

PARTIE III

Dans cette partie : $n \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si $\mathrm{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{M} = (\mu_{j,k})$ avec $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, où $\mu_{j,k}$ désigne l'élément de la j-ième ligne et de la k-ième colonne de la matrice M.

Lorsque $\varphi \in \mathscr{CM}_{2\pi}$, on définit la matrice $\mathrm{M}_n(\varphi) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\mathrm{M}_n(\varphi) = \left(\mu_{j,k}(\varphi)\right) \text{ avec } \mu_{j,k}(\varphi) = c_{j-k}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j-k)t} \, \mathrm{d}t$$

L'objet de cette partie est l'étude de quelques propriétés des valeurs propres de $\mathrm{M}_n(\varphi)$.

III.1/ Soit $\sigma \in \mathbb{R}$; on considère la fonction φ_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_0(t) = \sigma$

Expliciter alors la matrice $\mathrm{M}_n(\varphi_0)$ et préciser ses valeurs propres.

III.2/ Dans cette question, on suppose que $\varphi = \varphi_1$ (fonction définie au II.1 : 2π-périodique impaire telle que $\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0$ et $\varphi_1(t) = \pi$ pour $t \in]0, \pi[$).

III.2.1/ Expliciter la matrice $M_3(\varphi_1)$.

III.2.2/ Calculer les valeurs propres de $M_3(\varphi_1)$.

III.3/ Dans cette question suppose que $\varphi = f$ où f désigne la fonction définie au I.3 :

$$f(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(k^2-1)} \cos(kt)$$

III.3.1/ Déterminer la valeur des coefficients $c_k(f)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (on justifiera la réponse avec soin).

III.3.2/ Expliciter la matrice $M_3(f)$ et calculer ses valeurs propres.

Dans toute la suite du problème $\varphi \in \mathscr{CM}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

III.4/ Exprimer ${}^t M_n(\varphi)$ (matrice transposée de la matrice $M_n(\varphi)$) en fonction de la matrice $M_n(\varphi)$ dans les cas suivants :

III.4.1/ lorsque la fonction φ est paire

III.4.2/ lorsque la fonction φ est impaire.

III.5/ Soient λ_r , $1 \leqslant r \leqslant n$ les valeurs propres (complexes) de $M_n(\varphi)$;
exprimer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\lambda_r$ en fonction de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt$.

III.6/ Étant donnés n nombres complexes z_j , $1 \leqslant j \leqslant n$, on considère la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

et on note ${}^t\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \dots & \overline{z_n} \end{pmatrix}$ la conjuguée de la transposée de Z.
On pose alors $\mathscr{P} = {}^t\overline{Z} M_n(\varphi) Z$ et on note $\theta(n, \varphi, z_1, z_2, \dots, z_n)$ ou pour simplifier, $\theta(n, \varphi, Z)$ l'unique coefficient de la matrice $\mathscr{P}$.

III.6.1/ Exprimer $\theta(n, \varphi, Z)$ en fonction de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k e^{ikt}\right|^2 \varphi(t)\,dt$.

III.6.2/ En déduire que toutes les valeurs propres de $M_n(\varphi)$ sont réelles.

III.6.3/ On suppose, dans cette question, que $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.

Montrer que le nombre $\theta(n, \varphi, Z)$ est réel et positif ou nul.

III.6.4/ On désigne de nouveau par φ une fonction quelconque de $\mathscr{CM}_{2\pi}$.

Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$, tel que $\varphi(\mathbb{R}) \subset [a, b]$. Déduire de ce qui précède, en particulier de III.1 et III.6.3, que toutes les valeurs propres de $M_n(\varphi)$ appartiennent à l'intervalle $[a, b]$.

III.7/ Pour simplifier on notera c_k au lieu de $c_k(\varphi)$ les coefficients de Fourier de φ.

On rappelle (ou, le cas échéant, on demande d'admettre) que :
- Toute matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure ;
- l'égalité de Parseval est valable pour toutes les fonctions de $\mathscr{CM}_{2\pi}$.

III.7.1/ Calculer la trace de la matrice $\left(M_n(\varphi)\right)^2$ en fonction de $|c_0|^2$, $|c_1|^2$, $\dots$, $|c_{n-1}|^2$.

III.7.2/ Exprimer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r)^2$ en fonction de $|c_0|^2$, $|c_1|^2$, $\dots$, $|c_{n-1}|^2$ (où λ_r , $1 \leqslant r \leqslant n$, désignent les valeurs propres de $M_n(\varphi)$).

III.7.3/ Soit u une suite de nombres réels positifs ou nul. On suppose que la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge.

Quelle est la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} u_k$ lorsque n tend vers $+\infty$?

III.7.4/ Montrer, en utilisant ce qui précède, que la suite $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r)^2$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, et exprimer cette limite en fonction de $\int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi(t)\big)^2 \, \mathrm{d}t$

-

Problème 2 : CENTRALE PSI 2002

Notations et objectifs du problème

Pour toutes les questions géométriques on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère orthonormé naturel. Le but de ce problème est d'étudier quelques caractéristiques du mouvement sur l'axe Ox d'un mobile qui se trouve à l'origine O au temps initial $t=0$ et au temps $t=1$ et dont la vitesse initiale est nulle.

- L'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}$. Si (Φ) est une famille finie d'éléments de $\mathscr{C}$, le sous-espace de $\mathscr{C}$ qu'engendre (Φ) est noté $\mathrm{Vect}(\Phi)$.
- La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}$ est notée $\|\ \|_\infty$.
- On note $\langle\,|\,\rangle$ le produit scalaire sur $\mathscr{C}$ défini par :

$$\langle f \big| g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

L'orthogonalité entre éléments de $\mathscr{C}$ est toujours relative à ce produit scalaire dont la norme associée est notée $\|\ \|_2$. L'orthogonal d'un sous-espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{E}^\perp$.
- On désigne par u l'élément de $\mathscr{C}$ défini par $u(t)=\sqrt{3}(1-t)$ et par $\mathscr{H}$ l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}(u)$.
- On appelle *mouvement admissible* toute application ξ de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\xi(0)=\xi'(0)=\xi(1)=0$$

On note $\mathscr{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ constitué des mouvements admissibles.

On établit d'abord des résultats préliminaires très proches du cours et utiles dans tout le problème. Dans la partie II on calcule la meilleure borne pour la moyenne quadratique de la vitesse en fonction de l'accélération. La partie I fait établir des résultats qui servent dans la fin de la partie II ; on peut admettre ces résultats pour traiter la partie II.

Dans tout le problème, on note, pour $k\in\mathbb{N}$, $\omega_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ et e_k l'élément de $\mathscr{C}$ défini par :

$$\forall t\in[0,1],\ e_k(t)=\sqrt{2}\cos(\omega_k t)$$

On pose, par ailleurs, $\Omega =]0,+\infty[\ \setminus \{\omega_k \mid k\in\mathbb{N}\}$, complémentaire de $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $]0,+\infty[$.

Résultats préliminaires

A - Soit $h\in\mathscr{C}$, $h\neq 0$. Justifier l'égalité

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(h)\oplus\mathrm{Vect}(h)^\perp$$

et montrer soigneusement que $\left(\mathrm{Vect}(h)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(h)$.

On note Π_h le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(h)^\perp$.

Démontrer que, pour $f\in\mathscr{C}$:

$$\Pi_h(f) = f - \frac{\langle f \big| h\rangle}{\|h\|_2^2}h$$

B - Montrer que l'application $\xi \mapsto \xi''$ est un isomorphisme de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{H}$ dont l'isomorphisme réciproque est défini par

$$z\mapsto\left(t\mapsto\int_0^t (t-s)z(s)\,ds\right)$$

Partie I - Comportement asymptotique de racines d'équations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les coefficients de Fourier en sinus et cosinus d'une fonction réelle f, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 4-périodique, donnés par :

$$a_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx \quad ; \quad b_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx.$$

I.A - Démontrer que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathscr{C}$.

I.B - Pour $f \in \mathscr{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 4-périodique et paire, telle que, pour $t \in]-2,2]$ on ait :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad t = 1 \\ -f(2-t) & \text{si} \quad t \in]1,2] \end{cases}$$

I.B.1) Donner, sans démonstration, quelques éléments de symétrie du graphe de $\tilde{f}$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

I.B.2) Expliciter, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1}(\tilde{f})$ en fonction de $\langle f | e_k \rangle$. Calculer les autres coefficients de Fourier de $\tilde{f}$.

I.B.3) Montrer, en citant précisément les théorèmes utilisés, que, si $f \in \mathscr{C}$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k | f \rangle^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \langle f | e_k \rangle\, e_k \right\|_2 = 0$$

I.B.4) Montrer de même que, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et si $f(1) = 0$, alors, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f | e_k \rangle\, e_k(t)$$

La série de fonctions du second membre converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

I.B.5) En appliquant les résultats des deux questions précédentes aux fonctions u et $t \mapsto \sin(\omega(t-1))$, prouver les relations :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}$$

et, pour $\omega \in \Omega$

$$\tan\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

I.B.6) On note ϕ la fonction définie, pour $\omega \in \Omega$, par :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\omega}\left[\omega - \tan\omega\right]$$

Démontrer que, pour $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)} = \phi(\omega)$$

I.C - On pose pour $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$\phi_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)}$$

I.C.1) Montrer que, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, ϕ_n a une unique racine dans l'intervalle $]\omega_k, \omega_{k+1}[$. On note μ_n la plus petite de ces racines, c'est-à-dire la racine de ϕ_n appartenant à l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

I.C.2) Comparer ϕ_n et ϕ_{n+1} sur $]\omega_0, \omega_1[$. En déduire que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 2}$ converge en décroissant vers une limite $\mu \in [\omega_0, \omega_1[$.

I.C.3) Montrer que la suite $(\phi - \phi_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]\omega_0, \omega_1[$. En conclure que μ est différent de ω_0 et est l'unique racine de ϕ dans l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

Calculer une valeur approchée de μ à 10^{-6} près en justifiant l'algorithme utilisé.

Partie II - Estimation de la vitesse en moyenne quadratique

On se propose, dans cette partie, d'établir que, si $\xi \in \mathscr{A}$:

$$\|\xi'\|_2 \leqslant \frac{1}{\mu} \|\xi''\|_2$$

où μ a été défini dans la question I.C.2, et que cette constante $\dfrac{1}{\mu}$ est la plus petite possible valable quel que soit $\xi \in \mathscr{A}$.

- L'entier naturel n est toujours supposé supérieur ou égal à 2.
- Pour $h \in \mathscr{C}$ la notation Π_h est celle définie dans la question A des préliminaires.

II.A - Pour $z \in \mathscr{C}$, on note $\mathrm{T}(z)$ la fonction y définie sur $[0,1]$ par :

$$y(t) = (1-t)\int_0^t z(s)\,ds + \int_t^1 (1-s)z(s)\,ds$$

II.A.1) Montrer que $y = \mathrm{T}(z)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} y'' = -z \\ y(1) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

II.A.2) Prouver que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$ et que, si z_1 et z_2 appartiennent à $\mathscr{C}$,

$$\langle \mathrm{T}(z_1) | z_2 \rangle = \langle z_1 | \mathrm{T}(z_2) \rangle$$

II.A.3) Montrer que e_k est un vecteur propre de T pour une valeur propre à préciser en fonction de ω_k. Déduire de la question I.B.3 que, pour tout $z \in \mathscr{C}$:

$$\|\mathrm{T}(z)\|_2 \leqslant \frac{4}{\pi^2} \|z\|_2$$

et donner un cas d'égalité avec $z \neq 0$.

II.B - On note u_n la projection orthogonale de u sur $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{H}_n = \mathscr{H} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

II.B.1) Montrer que $\mathscr{H}_n = \mathrm{Vect}(u_n)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
Calculer les coordonnées de u_n dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et préciser la dimension de $\mathscr{H}_n$.

II.B.2) Montrer que $\mathscr{H}_n$ est stable par l'endomorphisme $\Pi_{u_n} \circ \mathrm{T}$. On note T_n l'endomorphisme de $\mathscr{H}_n$ induit par $\Pi_{u_n} \circ \mathrm{T}$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H}_n \ , \ \mathrm{T}_n(z) = \Pi_{u_n} \circ \mathrm{T}(z)$$

Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de vecteurs de $\mathscr{H}_n$:

$$\left\langle \mathrm{T}_n(z_1) \middle| z_2 \right\rangle = \left\langle z_1 \middle| \mathrm{T}_n(z_2) \right\rangle$$

En déduire que T_n est diagonalisable.

II.B.3) *Calcul des valeurs propres de* T_n.
Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, par ses coordonnées dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$, l'unique vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ tel que :

$$\mathrm{T}(z) - \frac{z}{\omega^2} = \frac{u_n}{\sqrt{6}}$$

À quelle condition sur ω, z appartient-il à $\mathscr{H}_n$? En déduire que les valeurs propres de T_n sont les réels de la forme $\dfrac{1}{\omega^2}$ où ω est un zéro de la fonction ϕ_n définie à la question I.C.

II.B.4) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{H}_n$:

$$\langle z | \mathrm{T}(z) \rangle \leqslant \frac{1}{\mu_n^2} \langle z | z \rangle \qquad (\mu_n \text{ a été défini à la question I.C.1}).$$

II.C - Soit $z \in \mathscr{H}$. On pose : $z_n = \Pi_{u_n} \left(\sum_{k=0}^{n} \left\langle z \middle| e_k \right\rangle e_k \right)$

II.C.1) Montrer que :

$$z_n \in \mathscr{H}_n \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \left\| z - z_n \right\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \left\| \mathrm{T}(z) - \mathrm{T}(z_n) \right\|_2 = 0$$

En déduire que

$$\langle z | \mathrm{T}(z) \rangle \leqslant \frac{1}{\mu^2} \langle z | z \rangle$$

II.C.2) Montrer que si C_2 est un réel tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H} \ , \ \langle z | \mathrm{T}(z) \rangle \leqslant \mathrm{C}_2 \langle z | z \rangle$$

alors $\mathrm{C}_2 \geqslant \dfrac{1}{\mu^2}$.

II.D - Soit $\xi \in \mathscr{A}$. Montrer que $\left\langle \xi' \middle| \xi' \right\rangle = \left\langle \xi'' \middle| \mathrm{T}(\xi'') \right\rangle$ et conclure.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆