DM N°8 (pour le 22/01/2013)

L'objectif du problème est de présenter des suites de fonctions polynomiales qui convergent uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction valeur absolue.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

Notations et rappels

Si α est un réel et n un entier naturel, on pose

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

On rappelle que si n et m sont des entiers naturels avec $n \leqslant m$, $\binom{m}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à m éléments.

1$^{\text{re}}$ Partie
Approximation par les polynômes de Lebesgue

A. Une relation entre coefficients binomiaux

1. Soient n et m deux entiers naturels avec $n \leqslant m$; montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p} = \binom{2m}{n}$.

On pourra considérer deux ensembles disjoints E et F ayant m éléments chacun, puis calculer de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $E \cup F$.

2. Soit n un entier naturel.

a) Vérifier que l'application $\alpha \mapsto \displaystyle\binom{2\alpha}{n} - \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$ est polynomiale puis en donner des zéros.

b) Montrer alors que pour tout réel α, $\displaystyle\binom{2\alpha}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.

B. Recherche d'un équivalent

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + w_n$ où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série absolument convergente. Étudier la suite $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel **strictement positif**.

2. Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et γ un réel tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\gamma}{n} + w'_n$ où $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

a) Étudier la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\gamma} cdot$

b) Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = (-1)^{n-1}\displaystyle\binom{1/2}{n}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}\cdot$

b) Établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\binom{1/2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}\cdot$

C. Résultat d'approximation

1. Préciser pour quelles valeurs du complexe z la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n$ est convergente.

2. Montrer que cette série converge normalement sur le disque fermé de $\mathbb{C}$, de centre 0 et de rayon 1 ; sa somme sera notée $f(z)$ pour $|z| \leqslant 1$.

3. Montrer soigneusement que si $|z| \leqslant 1$ alors $f(z)^2 = 1 - z$.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1,1[$ et justifier soigneusement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, puis que $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in [-1,1]$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{L}_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}(1-\mathrm{X}^2)^k$ (n^{e} polynôme de Lebesgue).

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{(2n-1)2^{2n}}\cdot$

b) Vérifier que pour tout $x \in [-1,1]$, $|x| = f(1-x^2)$ et montrer que la suite $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Lebesgue converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

2e Partie
Approximation par d'autres suites de polynômes plus simples

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1. a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

2. a) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1$.

b) Justifier alors que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

B. Étude d'une suite de fonctions

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans la suite, on considère les fonctions u_n et v_n définies, pour tout entier $n \geqslant 1$, par

$$v_n(0) = u_n(0) = 0 \;; v_n(x) = \int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad u_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} v_n(x) \quad \text{si } x \in]0,1].$$

2. Étude de la suite $(v_n(1))_{n\geqslant 1}$

a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^p \,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{2p+1}$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n(1) = \sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{I}_{2p+1}$.

c) Montrer alors que $v_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_1^n \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ puis justifier que $v_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}$.

3. Étude de la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$

a) Montrer que $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{I}_{2n}$.

b) En déduire un équivalent de $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ et préciser la constante C de la question **B.**3(b) de la première partie.

c) Montrer alors que la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

4. Soit $a \in]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la restriction de la fonction u_n au segment $[a,1]$ est k_n-lipschitzienne avec $k_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{a^2 2^{2n}}$.

b) En utilisant ce qui précède et le fait que la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1, montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 1 sur le segment $[a,1]$.

5. **a)** Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction u_n est croissante sur le segment $[0,1]$.

b) En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{M} > 0$ telle que

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1], \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

C. D'autres suites de polynômes approchant uniformément la valeur absolue sur $[-1,1]$

On considère la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ des polynômes suivants :

$$\mathrm{P}_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} \mathrm{X}^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $\mathrm{P}_n(x) = x u_n(x)$.

2. Déduire des questions 4. et 5. de la section précédente que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur le segment $[-1,1]$; on remarquera que les polynômes P_n sont pairs et on choisira convenablement le a de la question 4.

3. On pose $\mathrm{Q}_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \dfrac{2k}{2k-1} \mathrm{X}^{2k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1,1]$.

4. Montrer de même que les suites $(\widetilde{\mathrm{P}}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\widetilde{\mathrm{Q}}_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers la valeur absolue sur le segment $[-1,1]$, où

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} \mathrm{X}^{2k} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{Q}}_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2k}{2k-1} \mathrm{X}^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆