CORRIGÉ DM N°1 (INA Épreuve C , 1998)

PARTIE I

1. On pouvait ici faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - 2x + 1$, mais il y a un peu plus rapide.

En effet, $f(-2) = -7$ et $f(-1) = 1$, donc, f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une racine x_1 de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]-2, -1[$.
On montre de la même façon l'existence d'une racine $x_2 \in]0, 1[$ et d'une racine $x_3 \in]1, 2[$.

Puisque f est une fonction polynomiale de degré 3, elle admet au plus 3 racines réelles. Les racines trouvées ci-dessus sont donc les seules.

2.
- D'après le cours de 1ère année (relations coefficients-racines), on sait que, si un polynôme scindé s'écrit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots$, la somme de ses racines est égale à $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.
  Cette formule appliquée au polynôme précédent donne directement $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
- Puisque $x_2 < 1$ la relation précédente donne $x_3 + x_1 = 1 - x_2 > 0$. Puisque $x_3 > 0$ et $x_1 < 0$, cela s'écrit $|x_3| - |x_1| > 0$, soit $|x_3| > |x_1|$.
  Enfin, l'inégalité $|x_1| > |x_2|$ est évidente puisque $x_1 \in]-2, -1[$ et $x_2 \in]0, 1[$.

3. a)
- E est évidemment non vide, puisque la suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée, donc appartient à E.
- Si u et v sont deux suites de E, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+3} - v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$$
  donc, si λ est un réel :
$$(\lambda u_{n+3} + v_{n+3}) - (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - 2(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) = 0$$
  ce qui prouve que la suite $\lambda u + v$ appartient à E.
- Ce qui précède montre bien que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b)
- Soient u et v deux suites de E et λ un réel, alors :
$$\phi(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2) = \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) = \lambda\phi(u) + \phi(v)$$
  ce qui prouve la linéarité de ϕ.
- ϕ est bijective de E sur $\mathbb{R}^3$ puisque, si l'on se donne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe une et une seule suite $u \in E$ telle que $\phi(u) = (a, b, c)$: il s'agit de *la* suite de E déterminée par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$, et dont les autres termes sont définis, de façon unique, par la relation de récurrence.
- ϕ est donc un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^3$; il en résulte que $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

c) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$x_i^{n+3} - x_i^{n+2} - 2x_i^{n+1} + x_i^n = x_i^n(x_i^3 - x_i^2 - 2x_i + 1) = 0$$
puisque x_i est racine de l'équation $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Cela prouve que la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E.

4. Le système proposé s'écrit matriciellement sous la forme $AX = B$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
On calcule le déterminant de ce système :
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$$
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Les x_i étant distincts, ce déterminant est non nul ; le système est donc un système de Cramer, qui possède une solution unique. Cette solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est donnée par les formules de Cramer :

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{x_3 - x_2}{\det A} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & x_3 \\ x_1^2 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Rem : Le fait que les λ_i sont non nuls permet de justifier toutes les divisions par λ_i qui vont suivre...

5. a) • Il est facile de démontrer par récurrence sur n la propriété :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ a_{n+2} \geqslant a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 0$$

En effet :

– Cette propriété est vérifiée pour $n = 0$ compte tenu des valeurs initiales données par l'énoncé.

– Si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, alors

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n = a_{n+2} + \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\geqslant 0 \text{ d'après } \mathcal{P}(n)} + \underbrace{a_{n+1}}_{\geqslant 0 \text{ d'après } \mathcal{P}(n)} \geqslant a_{n+2}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

• On en déduit que la suite a est croissante ; puisque $a_2 = 1$, on aura donc $a_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

Rem : Le fait que a_n soit non nul pour $n \geqslant 2$ permet de justifier toutes les divisions par a_n qui vont suivre...

b) On procède classiquement ici par « analyse-synthèse ».

• S'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, en écrivant cette relation pour $n = 0, 1, 2$, on trouve que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est nécessairement solution du système (S), donc est unique.

• En considérant alors la solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de ce système trouvée à la question 4, et en considérant la suite u définie par $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura :

– u est élément de E, puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que les suites (x_i^n) appartiennent à E.

– $\phi(u) = (u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 1)$ d'après le système (S), soit $\phi(u) = \phi(a)$. ϕ étant un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^3$, on en déduit $u = a$, c'est-à-dire $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autre solution possible : On peut aussi démontrer que la famille des trois suites (x_i^n) pour $i \in \{1, 2, 3\}$ forme une base de E, ce qui prouvera directement l'existence et l'unicité des λ_i (ce seront les coordonnées de la suite a dans cette base).

Pour cela, puisque $\dim E = 3$, il suffit de prouver que cette famille est libre. Supposons donc qu'il existe trois réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette relation appliquée à $n = 0, 1, 2$ conduit alors à un système homogène de la forme $AX = 0$, où A est la matrice vue à la question 4. Puisque $\det A \neq 0$, la seule solution possible de ce système est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui établit le résultat.

c) On a, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$b_n = \frac{\lambda_1 x_1^{n+1} + \lambda_2 x_2^{n+1} + \lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} = \frac{x_3^{n+1}\left(\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n+1} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1}\right)}{x_3^n\left(\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n}\right)} = x_3\frac{\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n+1} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1}}{\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n}}$$

Puisque, d'après la question I.2, on a $\left|\dfrac{x_2}{x_3}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n = 0$, d'où l'on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_3$.

6. Le programme demandé n'a pas besoin d'utiliser de tableau, contrairement à ce que la plupart d'entre vous ont fait ! (du moins, ceux qui ont traité cette question...)

Il suffit d'utiliser quatre variables $a0, a1, a2, a3$ qui contiennent à chaque étape les termes a_n, a_{n+1}, a_{n+2} et a_{n+3}. La variable appelée bk contient la valeur de b_n.

```
suiteb := proc (n)
local a0, a1, a2, a3, bk, k;
a0 := 0; a1 := 0; a2 := 1;
for k from 2 to n do
   a3 := a2+2*a1-a0;
   bk := a3/a2;
   printf("b%d=%a\n", k, evalf(bk));
   a0 := a1; a1 := a2; a2 := a3
end do;
return NULL
end proc:
```

L'éxécution de ce programme donne :

```
suiteb(10);

   b2=1.
   b3=3.
   b4=1.333333333
   b5=2.250000000
   b6=1.555555556
   b7=2.
   b8=1.678571429
   b9=1.893617021
   b10=1.741573034
```

et, par comparaison, les solutions de l'équation fournies par MAPLE :

```
fsolve(x^3-x^2-2*x+1, x);

            -1.246979604, 0.4450418679, 1.801937736
```

PARTIE II

A. Une première estimation

1. Le calcul fait à la question I.5.c donne, pour tout $n \geqslant 2$:

$$b_n - x_3 = x_3\left(\frac{\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n+1} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1}}{\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n}} - 1\right) = x_3\left(\frac{\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\left(\frac{x_1}{x_3}-1\right) + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n\left(\frac{x_2}{x_3}-1\right)}{\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n}}\right)$$

$$= \frac{\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n(x_1 - x_3) + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n(x_2 - x_3)}{\lambda_3 + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n} + \lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n}}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1 - x_3)\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\underbrace{\left(\frac{1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n\left(\dfrac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}\right)}{1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n}\right)}_{=B_n}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^n=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=1$, ce qui signifie que

$$\varepsilon_n=b_n-x_3\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1-x_3)\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n$$

2. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|\varepsilon_n|}{\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n}=\left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1-x_3)\right|$. La suite $n\mapsto\dfrac{|\varepsilon_n|}{\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n}$ étant convergente est bornée, donc il existe bien un réel K tel que, pour tout entier $n\geqslant 2$ on ait $\dfrac{|\varepsilon_n|}{\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n}\leqslant K$, soit $|b_n-x_3|\leqslant K\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n$.

B. Utilisation des O

1. a) La suite nulle appartient évidemment à $E(\beta)$.

Si u et v sont deux suites de $E(\beta)$ et si λ est un réel, il existe deux entiers p et p' et deux constantes réelles M et M' (forcément positives) telles que

$$\forall n\geqslant p\ ,\ |u_n|\leqslant M\beta^n\qquad\text{et}\qquad\forall n\geqslant p'\ ,\ |v_n|\leqslant M'\beta^n$$

donc

$$\forall n\geqslant \max(p,p')\ ,\ |\lambda u_n+v_n|\leqslant(|\lambda|\,M+M')\beta^n$$

ce qui prouve que la suite $\lambda u+v$ appartient à $E(\beta)$.

Ainsi, $E(\beta)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) immédiat.

c) immédiat.

d) Si u est une suite de $E(\beta)$, il existe un entier p et un réel M tels que

$$\forall n\geqslant p\ ,\ |u_n|\leqslant M\beta^n$$

Si (w_n) est une suite de réels convergente, elle est bornée :

$$\exists M'\in\mathbb{R}_+\ \text{tq}\ \forall n\in\mathbb{N},\ |w_n|\leqslant M'$$

On a alors, pour $n\geqslant p$: $|u_nw_n|\leqslant MM'\beta^n$ ce qui prouve que la suite (u_nw_n) appartient à $E(\beta)$.

Enfin, puisque (w_n) est une suite de réels non nuls qui converge vers une limite non nulle, il en est de même de la suite $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)$; en appliquant alors ce qui précède à cette suite, on obtient que la suite de terme général $\dfrac{u_n}{w_n}$ appartient aussi à $E(\beta)$.

2. a) En reprenant les calculs de la question II.A.1, on obtient :

$$\varepsilon_n=\frac{\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n(x_1-x_3)+\lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n(x_2-x_3)}{\lambda_3+\lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n}=\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n(x_1-x_3)+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n(x_2-x_3)}{1+\alpha_n}$$

avec $\alpha_n=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^n+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$ qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$, pour des raisons déjà évoquées.

b) • Compte tenu de l'inégalité $|x_2|<|x_1|<|x_3|$, on aura :

$$\left|\frac{x_2}{x_3}\right|<\left|\frac{x_1}{x_3}\right|\quad,\quad\left|\frac{x_2x_1}{x_3^2}\right|=\frac{|x_2|\,|x_1|}{|x_3|^2}<\frac{|x_3|\,|x_1|}{|x_3|^2}=\left|\frac{x_1}{x_3}\right|\quad\text{et}\quad\left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2<\left|\frac{x_1}{x_3}\right|\ \text{puisque}\ \left|\frac{x_1}{x_3}\right|<1$$

ce qui démontre $\beta<\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|$.

- Les calculs qui suivent sont justifiés par les propriétés démontrées à la question II.B.A.

  On avait $\alpha_n = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^n + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$, donc d'après ce qui précède, $\alpha_n^2 = O(\beta^n)$ (en effet, on a aussi $\left|\dfrac{x_2}{x_3}\right|^2 < \left|\dfrac{x_2}{x_3}\right| \leqslant \beta$).

  D'autre part, $\dfrac{1}{1+\alpha_n} = 1-\alpha_n+O(\alpha_n^2)$, puisque α_n tend vers 0 et d'après le développement limité usuel de $\dfrac{1}{1+x}$, donc $\dfrac{1}{1+\alpha_n} = 1-\alpha_n+O(\beta^n)$.

  En remplaçant alors dans l'expression obtenue à la question 2.a, on trouve

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n (x_1-x_3) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n (x_2-x_3)\right](1-\alpha_n+O(\beta^n)) \\
&= \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n (x_1-x_3) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n (x_2-x_3)\right]\left[1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)\right] \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1-x_3)\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)
\end{aligned}$$

  car les termes $\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^n$, $\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$ etc... sont tous des $O(\beta^n)$ en vertu des majorations de la question précédente.

  C'est bien ce qu'il fallait démontrer.

C. Accélération de la convergence.

1. On vient d'établir : $b_n = x_3 + \gamma\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)$ pour $n \geqslant 2$.

On aura donc, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
c_n - \frac{x_1}{x_3} = \frac{b_{n+1}-b_n}{b_n-b_{n-1}} - \frac{x_1}{x_3} &= \frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} - \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n - \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} - \frac{x_1}{x_3} \\
&= \frac{O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n - \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^n \frac{O(\beta^n)}{\alpha'_n}
\end{aligned}$$

où α'_n tend vers $1-\dfrac{x_3}{x_1}$ quand $n \to +\infty$.

Puisque $\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^n O(\beta^n) = O\left[\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$ (revenir à la définition), on a bien le résultat voulu.

2. On calcule :

$$\begin{aligned}
d_n - x_3 = \frac{b_{n+1}-c_n b_n}{1-c_n} - x_3 &= \frac{b_{n+1}-x_3-c_n(b_n-x_3)}{1-c_n} \\
&= \gamma\frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^{n+1}) - \left[\frac{x_1}{x_3} + O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]\right]\left[\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)\right]}{1-c_n} \\
&= \frac{O(\beta^n)}{1-c_n} = O(\beta^n)
\end{aligned}$$

En effet, dans l'expression ci-dessus :

- Le terme $O(\beta^{n+1})$ est aussi un $O(\beta^n)$.
- Le terme $O\left[\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$ est un $O(\beta^n)$.

- Le terme $O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right] O(\beta^n)$ est un $O(\beta^n)$ puisque $\left|\frac{\beta x_3}{x_1}\right| < 1$.
- Le terme $\frac{1}{1-c_n}$ a une limite finie quand $n \to +\infty$.

3. L'erreur commise en approchant x_3 par d_n est donc en $O(\beta^n)$ alors que celle commise en l'approchant par b_n était en $O\left(\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right)$.

Puisque $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$, la convergence est donc plus rapide.

D. Application numérique

Le programme MAPLE pour calculer les d_n est donné ci-dessous. Je vous laisse le soin de bien analyser son fonctionnement.

```
suited := proc (n)
local a0, a1, a2, a3, bk, k, b2, b3, b4, ck, dk;
a0 := 0; a1 := 0; a2 := 1;

#calcul préliminaire de b2
a3 := a2+2*a1-a0
b2 := a3/a2;
a0 := a1; a1 := a2; a2 := a3;

#calcul préliminaire de b3
a3 := a2+2*a1-a0;
b3 := a3/a2;
a0 := a1; a1 := a2; a2 := a3;

for k from 3 to n do
  a3 := a2+2*a1-a0;
  b4 := a3/a2;
  ck := (b4-b3)/(b3-b2);
  dk := (b4-ck*b3)/(1-ck);
  printf("d%d=%a\n", k, evalf(dk));
  a0 := a1; a1 := a2; a2 := a3;
  b2 := b3; b3 := b4
end do;
return NULL
end proc;

suited(10);

d3=2.090909091
d4=1.924731183
d5=1.854885057
d6=1.826558266
d7=1.813471503
d8=1.807416026
d9=1.804547783
d10=1.803184869
```