CORRIGÉ DM N°7 ESIM 2003 PC

Première partie

1. **a)** • $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, car, si la série de terme général $|u_k|$ converge, alors $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est bornée.

• $\mathrm{F} \neq \varnothing$, car la suite nulle est dans F.

• Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $u = (u_k)_{k\geqslant 0} \in \mathrm{F}$, $u' = (u'_k)_{k\geqslant 0} \in \mathrm{F}$, alors les séries de termes généraux $|u_k|$ et $|u'_k|$ convergent, donc, comme $|\alpha u_k + u'_k| \leqslant |\alpha|\,|u_k| + |u'_k|$, la série de terme général $|\alpha u_k + u'_k|$ converge, et donc $\alpha u + u' \in \mathrm{F}$.

On conclut que F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de E.

b)

$$\mathrm{S}_n(v) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \text{si } z \neq 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n(v) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \quad \text{si } z = 1.$$

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$\left|u_n \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \mathrm{M}\mathrm{e}^{-x}\frac{|x|^n}{n!},$$

donc, comme la série de terme général $\dfrac{|x|^n}{n!}$ converge (cours), la série de terme général $u_n \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ converge.

3.
$$\Phi_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(zx)^n}{n!}\Big)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{zx}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{(z-1)x}.$$

4. Puisque $u \in \mathrm{E}$, il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant \mathrm{M}$,

d'où, par l'inégalité triangulaire : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |\mathrm{S}_n(u)| \leqslant \mathrm{M}(n+1)$.

La règle de d'Alembert montre que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{M}(n+1)\frac{x^n}{n!}$ est de rayon infini, donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{S}_n(u)\frac{x^n}{n!}$ est aussi de rayon infini.

5. • Si $z \neq 1$, on a, en manipulant des séries numériques qui sont toutes convergentes :

$$\Psi_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}_n(v)\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z}\mathrm{e}^{x} - \frac{z\mathrm{e}^{-x}}{1-z}\mathrm{e}^{zx} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z}\big(\mathrm{e}^{x} - z\mathrm{e}^{zx}\big)$$

• Si $z = 1$:

$$\Psi_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = x+1.$$

6. Puisque les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n\frac{x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{S}_n(u)\frac{x^n}{n!}$ sont de rayon infini, leurs sommes sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et donc, par multiplication par la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, qui est aussi de classe C^∞, on conclut que Φ_u et Ψ_u sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, autrement dit sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie

7. On a : $$\Psi_v(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-z}\big(\mathrm{e}^{x} - z\mathrm{e}^{zx}\big) = \frac{1-z\mathrm{e}^{(z-1)x}}{1-z} \underset{x\ \longrightarrow\ +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-z},$$

car $$\left|\mathrm{e}^{(z-1)x}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}((z-1)x)} = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)-1)x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}(z) - 1 < 0.$$

D'autre part : $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \mathrm{S}(v).$$

Enfin : $$\int_0^{+\infty}\Phi_v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(z-1)x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\mathrm{e}^{(z-1)x}}{z-1}\Big]_0^{+\infty} = -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z},$$

d'où les égalités voulues.

8. a)
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{(n+1)-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(n+1) = n!.$$

b) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C},\ \ x \longmapsto \dfrac{u_n}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ (cf. a)).
- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ (cf. 2.), et a pour somme Φ_u.
- Φ_u est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$, puisqu'elle est de classe C^∞ (cf. 6.)
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge car, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}|x|^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{|u_n|}{n!}\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = |u_n|,$$

et que $u\in\mathrm{F}$.

D'après un théorème du cours sur séries de fonctions et intégration sur un intervalle quelconque, on en conclut que Φ_u est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty}\Phi_u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \mathrm{S}(u).$$

9. a) Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ x\longmapsto f_n(x) = u_n\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $n\geqslant 1$ et tout $x\in[0\,;+\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{u_n}{n!}(nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x}) = \frac{u_n}{n!}(n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Il en résulte que $|f_n|$ est croissante sur $[0\,;n]$ et décroissante sur $[n+\infty[$, et que :

$$||f_n||_\infty = |f_n(n)| = |u_n|\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}.$$

D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}$, donc $\dfrac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, d'où $||f_n||_\infty \underset{n\to\infty}{=} o(|u_n|)$.

Comme la série de terme général $|u_n|$ converge, il en résulte que la série de terme général $||f_n||_\infty$ converge, et donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ converge normalement sur $[0\,;+\infty[$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ définie en 9.a) converge normalement, donc converge uniformément, sur $[0\,;+\infty[$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x) = u_n\dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après un théorème du cours sur convergence uniforme et limites :

$$\Phi_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\,\longrightarrow\,+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

10. a) La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\dfrac{x^n}{n!}$ est de rayon infini, donc sa somme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver terme à terme, d'où, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\Phi_u(x)\mathrm{e}^x\Big] = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\frac{nx^{n-1}}{n!} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\Phi_u(x)\mathrm{e}^x\Big] + \Psi_u(x) &= \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{S}_n(u)\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\mathrm{S}_{n-1}(u) + u_n\big)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{S}_n(u)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

b) Comme en a), l'application Ψ_u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver terme à terme, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Psi_u'(x) = e^{-x}\frac{d}{dx}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(u)\frac{x^n}{n!}\Big] - e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(u)\frac{x^n}{n!} = e^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} S_n(u)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \Psi_u(x)$$
$$= \Psi_u(x) + e^{-x}\frac{d}{dx}\Big[\Phi_u(x)e^x\Big] - \Psi_u(x) = e^{-x}\big(\Phi_u(x)e^x + \Phi_u'(x)e^x\big) = \Phi_u(x) + \Phi_u'(x).$$

c) On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Psi_u(t) = \Psi_u(0) + \int_0^t \Psi_u'(x)\,dx = \Psi_u(0) + \int_0^t \big(\Phi_u(x) + \Phi_u'(x)\big)\,dx$$
$$= \Psi_u(0) + \int_0^t \Phi_u(x)\,dx + [\Phi_u(x)]_{x=0}^{x=t} = \int_0^t \Phi_u(x)\,dx + \Phi_u(t),$$

car $\Psi_u(0) = \Phi_u(0) = u_0$.

11. D'après 9.b), $\Phi_u(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après 8.b), Φ_u est intégrable sur $[0;+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)\,dx = S(u)$.

On déduit, d'après 10 c) :

$$\Psi_u(t) = \int_0^t \Psi_u(x)\,dx + \Phi_u(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} S(u).$$

Troisième partie

12. a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^k\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

Comme :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2}\lim 0,$$

il en résulte que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge et que :

$$S(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant n+1}\frac{(-1)^k}{k+1}$ est alternée et son terme général, en valeur absolue, décroît vers 0. D'après le théorème spécial à certaines séries alternées, cette série converge (ce qu'on vient de voir) et la valeur absolue du reste est inférieure ou égale à la valeur absolue du premier terme du reste, c'est-à-dire :

$$|r_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

c) Remarquons que $u \in E$ (car la suite u est bornée), mais que $u \notin F$ (car la série de terme général $|u_k|$ diverge).

On a, d'après 12 a), pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n(u) = S(u) - r_n = \ln 2 - r_n$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $h_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto h_n(x) = r_n\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Comme en 9.a) : $\displaystyle ||h_n||_\infty = |h_n(n)| = |r_n|\frac{n^n}{n!}e^{-n} \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{n^n}{n!}e^{-n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$, d'où, d'après l'exemple de Riemann, la convergence normale, donc uniforme, de la série des h_n.

Comme la série des h_n converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit, d'après un théorème du cours sur convergence uniforme et limites, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \Psi_u(x) = \ln 2$.

13. **a)** • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\Phi_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!}\Big)\mathrm{e}^{-x}$,

d'où, si $x \neq 0$: $\displaystyle\Phi_u(x) = -\frac{1}{x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Big)\mathrm{e}^{-x} = -\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}$.

D'autre part, d'après le premier terme de la série entière, $\Phi_u(0) = 1$.

• L'application Φ_u est continue sur $[0\,;+\infty[$ (cf. I6.), et $x^2\Phi_u(x) = x(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ (par prépondérance classique), donc Φ_u est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

b) Considérons l'application

$$g : [a\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ (x,t) \longmapsto g(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}.$$

• g est continue sur $[a\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

• Soit $b \in [a\,;+\infty[$. On a, pour tout $(x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;+\infty[$:

$$|g(x,t)| = \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

et l'application $\varphi_b : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est continue par morceaux, positive ou nulle, et intégrable sur $]0\,;+\infty[$, car, en 0, $\varphi_b(t) = \dfrac{(\mathrm{e}^{-at}-1)-(\mathrm{e}^{-bt}-1)}{t} \underset{t \longrightarrow 0}{\longrightarrow} -a+b$, et, en $+\infty$, $t^2\varphi_b(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance classique.

Ceci montre que g vérifie l'hypothèse de domination locale.

• L'application $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}$ existe et est continue sur $[a\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

• On a, pour tout $(x,t) \in [a\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$:

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\Big| = \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at},$$

et l'application $t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}$ est continue par morceaux, positive ou nulle et intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Ceci montre que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int_0^{+\infty}$, il en résulte que F est de classe C^1 sur $[a\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in [a\,;+\infty[$:

$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Par primitivation, on obtient, pour tout $x \in [a\,;+\infty[$:

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a) + \int_a^{+\infty} \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x - \ln a.$$

Remarque : On pouvait calculer $\mathrm{F}(x)$ par une autre méthode, utilisant la linéarité de l'intégrale, des changements de variable, la relation de Chasles.

14. D'après 13.a), Φ_u est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} \Phi_u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_1(2) = \ln 2.$$

D'autre part, d'après 12.c) : $\Psi_u(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$ On conclut :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \Psi_u(x) = \int_0^{+\infty} \Phi_u(x)\,\mathrm{d}x.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆