CORRIGÉ DS N^{o}6

I. Calcul de $F(1)$ et $F(2)$

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).
Le domaine de définition de F est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2°) **a)** Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par exemple, on a $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{(\cos)'}{\cos} = (-\ln\circ\cos)'$. Donc

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{2}\ .$$

b) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan t \leqslant 1$, donc (J_n) est décroissante à valeurs positives, donc convergente.

c) En utilisant le changement de variable $u = \tan t$, on a

$$J_n + J_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t)\,(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}\ .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $2l = 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

d) Pour tout entier naturel non nul k, on a $\dfrac{1}{2k} = J_{2k-1} + J_{2k+1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}(J_{2k-1}+J_{2k+1}) \\
&= (J_1+J_3) - (J_3+J_5) + \cdots + (-1)^{n+1}(J_{2n-1}+J_{2n+1}) \\
&= J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1}
\end{aligned}$$

après télescopage.

e) On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus. On en déduit : $\dfrac{1}{2}F(1) = J_1$, donc $F(1) = 2\,J_1 = \ln 2$.

3°) On a : $F(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$, voir démo. en II.3

II. Quelques propriétés de F

1°) **a)** $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \geqslant a$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^a}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ est convergente ($a > 1$), la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b) On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$. Comme, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n=1$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$.

c) Chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ étant continue, on en déduit également la continuité de la fonction somme F sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>1$, donc la continuité sur $]1,+\infty[$.

d) Du critère spécial des séries alternées, on déduit aussi que, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série définissant F : $|R_n(x)| \leqslant |\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}| = \frac{1}{(n+1)^x}$. Soit alors $a>0$; pour $x \in [a,+\infty[$, on a $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$, il y a donc convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ de la série de fonctions définissant F.
Comme dans la question précédente, on en déduit que F est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) *Dérivabilité de F*

a) Soit $x>0$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $h_x'(t) = \dfrac{t^{x-1}(1-x\ln t)}{t^{2x}}$.
Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{1/x},+\infty[$ et positive sur $]0,\mathrm{e}^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x},+\infty[$ et croissante sur $]0,\mathrm{e}^{1/x}]$.
On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/x}\right)+1$.

b) $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^x}$.
Soit $a>0$. On pose $N_a = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/a}\right)+1$. Pour tout $x \geqslant a$, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant N_a} f_n'(x)$ converge et, pour $n \geqslant N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\displaystyle\sup_{x\geqslant a} |\rho_n(x)| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

3°) *Lien avec ζ*

Pour $x>1$, $F(x)-\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$.
Comme $2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

III. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6°) *étude de la convergence*

a) Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc la série produit de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2$ (*théorème du cours...*).

b) Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geqslant (n-1)\frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

7°) *Cas où $x = 1$*

a) $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) \\ &= 2(-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2}\frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

b) *Monotonie*

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

c) "Classiquement", $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum_{n\geqslant 2} c_n(1)$ converge.

IV. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

1°) *Développement asymptotique en 1*

a) On pose $h = x - 1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$F(x) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + hF'(1) + o(h).$$

On a aussi, d'après la formule de Taylor-Young : $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-h\ln 2} = h\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)$ au voisinage de $x = 1$.

b) *Développement de ζ*

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h\ln 2 - \dfrac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h\ln 2}\frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \dfrac{\ln 2}{2}h + o(h)} \\
&= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + hF'(1) + o(h)\right)\left(1 + \frac{\ln 2}{2}h + o(h)\right) = \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + h\left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2}\right) + o(h)\right) \\
&= \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

2°) *Développement asymptotique en 1 (bis)*

a) Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [1,2]$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$. On en déduit que : $0 \leqslant v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

b) Pour $x \in [1,2]$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (vers 0) ; comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge. De l'encadrement précédent, on déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$.

c) Pour $x \in]1,2]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(x) - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

d) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $[1,2]$. Notons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. D'après (a), $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$.
Donc $\displaystyle\sup_{x\in[1,2]} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

e) Pour $x \in]1,2]$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$; $v_n(1) = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.
v_n est continue, sauf peut-être en 1.
En 1 : en posant $h = x-1$, $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et $\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \dfrac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-h\ln n} - \mathrm{e}^{-h\ln(n+1)}\right) = \dfrac{1}{h}\Big((1 - h\ln n + o(h)) - (1 - h\ln(n+1) + o(h)\Big) = \ln(n+1) - \ln n + o(1)$; donc $v_n(x) = \dfrac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1)$. Donc v_n est continue en 1.
On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$. La convergence uniforme sur $[1,2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,2]$.
On en déduit que $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+.
D'où $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+.

3°) *Application*

Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de .... les égalités $a = 1$ et $\dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2} = b = \gamma$. D'où $F'(1) = \ln 2\left(\gamma - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

D'après ....., $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}=-F'(1)=\ln 2\left(\frac{\ln 2}{2}-\gamma\right)$.

V. Étude d'une fonction

1°) Si $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=+\infty$; si $x=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=\ln 2$: dans ces deux cas, la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x>0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-nx}=0$, donc $u_n(x)=\ln(1+e^{-nx})\sim_{n\to+\infty}e^{-nx}$: par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ converge.
En conclusion, $D_f=]0,+\infty[$.

2°) Soit $a>0$. Pour $x\in[a,+\infty[$, on a $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leqslant\ln(1+e^{-nx})\leqslant\ln(1+e^{-na})$ (terme général d'une série convergente). La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.
Les fonctions u_n étant continues, on en déduit la continuité de la somme f sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

3°) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (par addition d'inégalités de même sens, l'une au moins étant stricte).

4°) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1,+\infty[$; $\lim\limits_{x\to+\infty}u_0(x)=\ln 2$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0$. Par le théorème d'interversion limite-somme, on déduit que $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ln 2$.

5°) **a)** Pour tout $x>0$ fixé, la fonction ψ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \psi_x(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\psi_x(n)\ .$$

On en déduit que

$$\int_n^{n+1}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\psi_x(n)=u_n(x)\leqslant\int_{n-1}^{n}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$$

(la première inégalité est vraie pour tout n entier naturel, la deuxième à partir du rang 1). En sommant ces inégalités (les séries et intégrales impropres étant convergentes), on obtient

$$\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=f(x)\leqslant\ln 2+\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(la convergence de l'intégrale impropre résulte directement du théorème de comparaison série-intégrale. Elle peut aussi se démontrer ainsi :
$\psi_x(t)=\ln(1+e^{-tx})\sim_{t\to+\infty}e^{-xt}$. Or on sait que, pour $x>0$ fixé, la fonction $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est donc de même de la fonction ψ_x.)

b) La fonction $y\mapsto\frac{\ln(1+y)}{y}$ est continue sur $]0,1]$, et prolongeable par continuité en 0 (avec la valeur 1) d'où l'existence de l'intégrale. On la calcule maintenant par une intégration terme à terme.
Sur l'intervalle $I=]0,1[$, on a $\frac{\ln(1+y)}{y}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(y)$, en posant $f_n(y)=(-1)^{n-1}\frac{y^{n-1}}{n}$. Cette série vérifie les condions du critère spécial sur les séries alternées, donc son reste d'ordre n est majoré, en valeur absolue, par $|\frac{y^n}{n+1}|$, donc est uniformément majoré par $\frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Cette série de fonctions converge donc uniformément sur [0,1] et on peut donc intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^{n-1}}{n}\Big)\,\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 y^{n-1}\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=F(2)\ .\end{aligned}$$

c) Le changement de variable $y = e^{-tx}$ donne

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\ln(1+y)}{xy}\,\mathrm{d}y = \frac{F(2)}{x}\ .$$

La question ..... donne alors

$$\frac{F(2)}{x} \leqslant f(x) \leqslant \ln 2 + \frac{F(2)}{x}\ ,$$

soit l'encadrement recherché avec $\lambda = \ln 2$ et $\mu = F(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

6°) Donc $F(2) \leqslant x\,f(x) \leqslant x\,\ln 2 + F(2)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,f(x) = F(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$. Donc $f(x) \sim \frac{\pi^2}{12x}$ lorsque $x \to 0^+$.
