DS N°6 (le 16/01/2010)

PROBLÈME 1 : Autour de la fonction Zeta alternée de Riemann (extrait de CCP MP 2008)

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$\mathrm{F}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie **III.** qui utilise des résultats de la partie **I.**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $[0,1]$ par

$$g_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-t)^k.$$

Pour $t\in[0,1]$, on pose $g(t)=\dfrac{1}{1+t}$.
Démontrer que la suite (g_n) converge simplement vers g sur $[0,1[$. La convergence est-elle uniforme ?
En utilisant un majorant simple de $\left|g-g_n\right|$, montrer que $\mathrm{F}(1)=\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\mathrm{F}(1)$.

3. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. *Dérivabilité de* F

a) Soit $x>0$. étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t\mapsto\dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

b) Pour $n\geqslant 1$, on pose $f_n : x\mapsto\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
En déduire que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. *Lien avec* ζ
Calculer, pour $x>1$, $\mathrm{F}(x)-\zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$\mathrm{F}(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.
Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.
Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*

a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
En déduire, pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

7. *Cas où $x = 1$*
On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})}$.
En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}$, où $\mathrm{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{\mathrm{H}_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.

c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8. *Développement asymptotique en 1*

a) écrire en fonction de $\ln 2$ et de $\mathrm{F}'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $\mathrm{F}'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a) Justifier que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

b) Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

c) Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

d) Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

e) En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}.$$

PROBLÈME 2 : Produits infinis (d'après Centrale TA 1981)

Pour toute suite réelle ou complexe $u = (u_n)$, le symbole $\prod_q^{\infty} u_n$, où q est un entier naturel donné, désigne la limite **si elle existe** de la suite p définie par $p_n = u_q u_{q+1} \dots u_n$ (pour $n \geqslant q$).

Partie I

I.1 Démontrer l'existence et calculer les valeurs, de :

$$\prod_2^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad \prod_2^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \prod_2^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

[*Indication:* Dans les trois cas, on calculera explicitement la valeur de p_n.]

I.2 **Dans toute cette question**, on suppose que u est une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

a) Montrer que $\prod_0^{\infty} u_n$ existe. Démontrer que sa valeur est non nulle si et seulement si la série $\sum \ln(u_n)$ est convergente.

b) En déduire que $\prod_0^{\infty}(1+u_n)$ existe si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.

c) Montrer que $\prod_0^{\infty}(1+u_n)$ existe si et seulement si $\prod_0^{\infty}(1-u_n)$ existe **et est non nul**.

Partie II

II.1 Démontrer l'existence, et calculer les valeurs, de :

$$\prod_2^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad ; \quad \prod_2^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

[*Indication:* Dans le premier cas, on fera comme au I. Dans le deuxième cas, on pourra par exemple trouver une majoration simple de p_{2n+1} en regroupant les termes 2 par 2.]

II.2 Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1$.
- $\sum u_n$ converge.

Montrer que $\prod_{0}^{\infty}(1+u_n)$ existe, et que $\prod_{0}^{\infty}(1+u_n)$ vaut 0 si et seulement si la série $\sum u_n^2$ diverge.
[*Indication:* On étudiera, grâce à un DL, les deux comportements possibles de la série $\sum[u_n - \ln(1+u_n)]$.]

Partie III

III.1 On définit une suite a pour $n >= 1$ par :

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad ; \quad a_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

a) Étudier la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$.
[*Indication:* Pour la première, on pourra calculer la somme partielle s_{2n}.]

b) Simplifier $(1+a_{2n-1})(1+a_{2n})$. En déduire que la suite $p_{2n} = \prod_{q=3}^{2n}(1+a_q)$ converge vers une limite non nulle.
En déduire l'existence et la valeur de $\prod_{3}^{\infty}(1+a_n)$.

III.2 Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1. \\ \prod_{0}^{\infty}(1+u_n) \text{existe, } \textbf{et est non nul}. \end{cases}$$

a) Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.
[*Indication:* On pourra considérer encore la série de terme général $(u_n - \ln(1+u_n))$.]

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ si, et seulement si, la série de terme général (u_n^2) diverge.

III.3 Dans cette question on étudie un dernier cas distinct des précédents : on suppose que :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < 1$ et que $(\sum |u_n|)$ converge.

Montrer que $\prod_{0}^{\infty}(1+u_n)$ existe.
[*Indication:* On pourra chercher un équivalent de $|\ln(1+u_n)|$.]
Qu'en conclure quant à $\prod_{1}^{\infty}(1 - \frac{\cos(e.n^2)}{4n^2})$?

Partie IV

Dans toute la suite du problème, (u_n) désigne une suite à valeurs **complexes**.

IV.1 Soit u une suite **complexe** telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n /= -1$.

Montrer que si $\prod_{0}^{\infty}(1+u_n)$ existe et vaut 0, alors la série $\sum \ln|1+u_n|$ diverge. De quelle façon ?

IV.2 On considère dans toute cette question une suite u à valeurs complexes vérifiant les deux conditions :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$.
- $\sum |u_n|$ converge.

On définit pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ $\operatorname{Arg} z$ comme l'unique détermination de son argument comprise dans $]-\pi, \pi]$:

$$\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi] \qquad z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$$

a) Montrer que $\prod_0^{\infty} (1 + |u_n|)$ existe.

Montrer que ce réel est strictement supérieur à 1 à une condition que l'on déterminera.

b) Montrer que la suite $p_n = \prod_0^{n} (1 + u_k)$ est une suite de CAUCHY.

On démontrera préalablement la formule :

$$\Big|\prod_1^n (1 + a_k) - 1\Big| \leqslant \prod_1^n (1 + |a_k|) - 1$$

Comme toute suite de CAUCHY dans $\mathbb{C}$ est convergente, on en déduit donc l'existence de $\prod_1^{\infty} (1 + u_n)$.

c) Montrer que la série $\sum \ln |1 + u_n|$ est **absolument** convergente.

d) Montrer que $\prod_0^{\infty} (1 + u_n) \neq 0$.

e) Montrer que la série $\sum \operatorname{Arg} |1 + u_n|$ est **absolument** convergente.

f) Le produit $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ existe-t-il ? Si oui, donnez sa valeur. Sinon, dites (sommairement) pourquoi.

On admettra, si nécessaire, que $\prod_1^{\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}}$.

IV.3 Soit u une suite **complexe** telle que $\prod_0^{\infty} (1 + u_n)$ existe et est non nul.

a) Montrer que u_n ne vaut jamais -1, et tend vers 0.

b) Montrer que $\sum \ln |1 + u_n|$ converge.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆