DS n°1 (le 17/09/2011)

Calculatrices non autorisées.

Ne PAS traiter les questions en gris.

EXERCICE

Dans tout l'exercice, on considère la fonction numérique f de variable réelle définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \text{ réel fixé et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étudier rapidement la fonction f, tracer sa courbe représentative (C) et préciser les points d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y = x$.

   Par la suite, on notera ℓ_1 et ℓ_2 les abscisses de ces points ($\ell_1 < \ell_2$).

2. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 < \ell_1$.
   - **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < \ell_1$.
   - **b)** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - **c)** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 \in]1, \ell_2[$.
   - **a)** Démontrer que $\ell_2 < u_1 < 2$.

     Dans les questions qui suivent, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   - **b)** Étudier le signe de $f \circ f(x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.
   - **c)** Prouver que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser la limite de chacune d'entre elles.
   - **d)** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

4. Étudier la suite (u_n) pour les valeurs de u_0 qui n'ont pas été considérées dans les deux précédentes questions.

PROBLÈME I : Méthode de Newton (ENSI 1986, option TA, Maths appliquées, 2h30)

Préambule :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, admettant dans I un zéro et un seul et telle que la dérivée f' ne s'annule pas sur I.
On introduit la fonction F définie sur I par la relation

$$(*) \qquad \mathrm{F}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

et on suppose que l'intervalle I est stable par F, i.e., $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) \in \mathrm{I}$.
La méthode de Newton consiste alors à construire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné dans I} \\ x_{n+1} & = \mathrm{F}(x_n) \end{cases}.$$

Définition :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite finie ℓ. On suppose que, pour tout n, $x_n \neq \ell$. On dit que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est quadratique si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_n = \frac{|x_{n+1}-\ell|}{|x_n-\ell|^2},\ n\in\mathbb{N}$$

converge vers une limite finie strictement positive.

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel strictement positif.

Première partie

On considère ici la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \alpha$.

1. Montrer que les hypothèses du préambule sont satisfaites sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0,+\infty[$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par $u_0 > 0$ et par la méthode de Newton associée à la fonction f.

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\dfrac{u_n-\sqrt{\alpha}}{u_n+\sqrt{\alpha}}$ en fonction de $\dfrac{u_0-\sqrt{\alpha}}{u_0+\sqrt{\alpha}}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $u_0 > 0$.
Quelle est sa limite ?

c) Montrer que pour $u_0 > 0$ et $u_0 \neq \alpha$, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique.

3. Soit $u_0 > 0$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $0 \leqslant u_{n-1} - \sqrt{\alpha} \leqslant 2(u_{n-1} - u_n)$.

b) En déduire l'estimation de l'erreur à la n-ième itération :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{\alpha} \leqslant u_{n-1} - u_n, \qquad n \geqslant 2$$

Quel est l'intérêt pratique de cette estimation de l'erreur ?

4. On écrit α sous la forme $\alpha = 2^p\beta$ où p est un entier et β un réel tel que $1/2 \leqslant \beta < 1$.
On considère la suite (u_n) construite à partir de la valeur initiale $u_0 = 2^{\mathrm{E}(p/2)}$ où $\mathrm{E}(p/2)$ désigne la partie entière de $p/2$.

a) Montrer que $\left|\dfrac{u_0-\sqrt{\alpha}}{u_0+\sqrt{\alpha}}\right| < (\sqrt{2}-1)^2$
(On pourra distinguer les 2 cas : p entier pair, p entier impair).

b) En remarquant que $(\sqrt{2}-1)^2 < \frac{1}{5}$, montrer qu'on a l'estimation de l'erreur suivante :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{\alpha} \leqslant 2u_1\left(\frac{1}{5}\right)^{2^n}, \quad n \geqslant 1$$

c) Quel intérêt supplémentaire offre cette estimation de l'erreur par rapport à celle obtenue à la question 3 ?

5. Application numérique :
Appliquer les résultats précédents au calcul de $\sqrt{5}$ en exigeant des précisions de plus en plus grandes.
Est-il réaliste d'envisager une « grande » précision lorsqu'on utilise une calculatrice manuelle ? D'où vient la difficulté ?

Seconde partie

On considère ici la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \alpha$ et on lui associe la fonction F définie par la relation (*).

6. **a)** Montrer que $]0,\dfrac{2}{\alpha}[$ est le plus grand intervalle contenu dans $]0,+\infty[$ et stable par F.

   b) Montrer que les hypothèses du préambule sont satisfaites sur $]0,\dfrac{2}{\alpha}[$.

7. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton et associée à la fonction f.

   a) Montrer que si la valeur initiale v_0 est choisie dans l'intervalle $]0,\dfrac{2}{\alpha}[$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   b) Quelle est sa limite ?

   c) Montrer que pour $v_0 \in]0,\frac{2}{\alpha}[$ et $v_0 \neq \frac{1}{\alpha}$ la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique.

8. Montrer comment on peut utiliser la partie II pour améliorer la précision de l'algorithme décrit à la partie I. On reprendra en particulier l'application numérique de la question 5.

Troisième partie

Soit k un entier naturel strictement supérieur à 1 et soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} w_0 & = a \\ w_{n+1} & = \mathrm{F}(w_n) \end{cases}$ où F est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k}\left[(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right]$$

9. **a)** En étudiant les variations de la fonction F sur $]0,+\infty[$ montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant w_{n-1} - a^{1/k} \leqslant k(w_{n-1} - w_n)$$

   En déduire que pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant w_n - a^{1/k} \leqslant (k-1)(w_{n-1} - w_n)$$

   c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite donnée par la méthode de Newton pour une certaine fonction f que l'on précisera.

PROBLÈME II : Accélération de convergence (ENSAE 1998, Maths appliquées, 2h)

Les trois premières parties sont très largement indépendantes. Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

Dans tout le problème a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est à dire dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée continue).

Partie préliminaire

Justifier l'existence de $\sup\limits_{y\in[a,b]} |f'(y)|$, que l'on notera K dans la suite du problème, et montrer que $\forall x \in [a,b], |f(x) - f(x')| \leqslant \mathrm{K}|x - x'|$. (On invoquera de façon précise les théorèmes du cours utilisés).

On supposera dans toute la suite du problème que $\mathrm{K} < 1$.

Partie I : Théorème du point fixe

1. Montrer qu'il existe un et un seul $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$ et que l'itération définie par : $x_0 \in [a,b]$; $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c.

2. On définit l'erreur à la n-ième itération par : $e_n = x_n - c$. Montrer que :

$$|e_n| \leq \frac{\mathrm{K}^n}{1-\mathrm{K}}|x_1 - x_0|$$

Partie II : Procédure diagonale d'Aitken.

On suppose dans toute la suite du problème que $\forall x \in [a,b], |f'(x)| > 0$.

1. Montrer que si $e_0 \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \neq 0$. Que peut on dire si $e_0 = 0$?

   On supposera, dans la suite de cette partie, que $e_0 \neq 0$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n \neq 0$.

3. Montrer que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers $f'(c)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier n, on pose :

$$x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

   Justifier l'existence de x'_n et montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - c}{x_n - c} = 0$$

   Commenter ce résultat.

Partie III : Méthode de Steffenson.

Dans cette partie, g est une fonction de $[a,+\infty[$ dans $[a,+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que g' est croissante et strictement négative. On notera : $\mathrm{N}(x) = g(g(x)) - 2g(x) + x$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul $d \in [a,+\infty[$ tel que $g(d) = d$.

2. Soit $x \in [a,+\infty[$. Montrer qu'il existe y_1 et y_2 dans $[a,+\infty[$ tels que :

$$g(x) - x = (g'(y_1 - 1)(x-d) \quad \text{et}$$
$$\mathrm{N}(x) = [(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)](x-d)$$

3. Montrer que $\mathrm{N}(x) = 0$ si et seulement si $x = d$.

4. On pose, pour $x \in [a,+\infty[$,

$$\mathrm{G}(x) = \begin{cases} x - \dfrac{(g(x)-x)^2}{\mathrm{N}(x)} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d. \end{cases}$$

   Montrer que G est une fonction continue de $[a,+\infty[$ dans $[a,+\infty[$.

5. On définit la suite $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x''_0 \in [a,+\infty[$ et $x''_{n+1} = \mathrm{G}(x''_n)$. Montrer que cette suite converge vers d.

Partie IV : Application.

On cherche à estimer numériquement la solution de l'équation $\exp(-x) = x$.
Montrer que l'on peut mettre en œuvre les trois algorithmes étudiés dans le problème.
En prenant $x_0 = x''_0 = 0,5$ calculer la solution de l'équation à 10^{-6} près. Donner le nombre d'itérations nécessaires permettant de parvenir à la précision souhaitée pour chacun des algorithmes.