# CORRIGÉ DU DS°2

## QUESTIONS DE COURS : E3A PSI 2008

*Je ne reviens bien sûr pas sur les démonstrations...*

**Question 1.**

**1.** L'implication proposée est *fausse* comme le montre le contre-exemple suivant :

Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n)$ tend bien vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ; cependant, la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge !

**2.** Il a été démontré en classe que l'implication est vraie :

*Si* la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, *alors* la suite $(u_n)$ converge vers 0.

**3.** L'implication a été démontrée en cours *pour des séries à termes positifs !*.

Dans le cas général, l'implication est fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
On a bien : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
*Cependant*, la série de terme général $v_n$ est convergente, car elle vérifie le critère spécial sur les séries alternées, et la série de terme général $u_n$ est divergente, comme somme d'une série convergente (celle de terme général $v_n$) et d'une série divergente (la série harmonique).

**4.** L'implication proposée est *fausse* comme le montre le contre-exemple suivant :

Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $u_n$ converge (série harmonique alternée) mais la série de terme général $|u_n|$ diverge (série harmonique).

*La réciproque de la propriété est, elle, vraie : toute série de nombres réels qui est absolument convergente est convergente.*

**Question 2.**

On démontre que la série proposée vérifie le critère spécial sur les séries alternées. En effet :

- Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ est du signe de $(-1)^n$ : la suite est bien alternée.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après les croissances comparées des suites usuelles.
- Si on pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ pour tout $x > 0$.
  Pour $x \geqslant \mathrm{e}$, $f'(x) \leqslant 0$ ; $f$ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ ; puisque $|u_n| = f(n)$, on en déduit que la suite $(|u_n|)$ est décroissante pour $n \geqslant 3$.

Il résulte donc du critère spécial sur les séries alternées que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

**PROBLÈME : CCP PSI 2006**

# Partie I : deux exemples.

I.1. **Cas d'une suite constante.**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ; on suppose ici que la suite $a$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

I.1.2. On a donc : $a_n^* = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha = \dfrac{1}{2^n} 2^n \alpha = \alpha$

I.1.3. $\alpha$ étant différent de $0$, les termes généraux des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ ne tendent pas vers $0$ : ces séries sont grossièrement divergentes.

I.2. **Cas d'une suite géométrique.**

Soit $z \in \mathbb{C}$ ; on suppose ici que la suite $a$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Toujours d'après la formule du binôme :

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k 1^{n-k} = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

Ainsi, $(a_n^*)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{z+1}{2}$.

I.2.2. On suppose ici que $|z| < 1$.

1.2.2.1. On sait calculer la somme des termes d'une suite géométrique. La raison $z$ étant différente de $1$,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Pour $|z| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$ donc ce terme admet une limite. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

1.2.2.2. On a $\left|\dfrac{z+1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1+|z|}{2} < 1$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

I.2.3. On suppose ici que $|z| \geqslant 1$.

I.2.3.1. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{n\geqslant 0} z^n$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle). sk

I.2.3.2. Pour $z = -2$, on a $a_n^* = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ est une série géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et elle est donc convergente (de somme $\dfrac{2}{3}$).

I.2.3.3. Pour $z = e^{i\theta}$ avec $0 < |\theta| < \pi$, on a $a_n^* = \dfrac{(1+e^{i\theta})^n}{2^n}$. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}$.

Or :

$$\left|\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right|^2 = \frac{(1+\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}{4} = \frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{4} = \frac{2(1+\cos\theta)}{4} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

donc $\left|\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}\right| < 1$ puisque $0 < \left|\dfrac{\theta}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ est donc convergente et a pour somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* &= \frac{1}{1-\frac{1+e^{i\theta}}{2}} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}\\ &= \frac{2e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{ie^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 1+i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

## Partie II : étude du procédé de sommation.

*Rem :* L'énoncé supposait dans cette partie que $a$ est à valeurs réelles, mais cela ne sert strictement à rien pour les démonstrations !

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

II.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier $k$ fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

II.1.1.1. $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

II.1.1.2. Par croissance comparées, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$$

II.1.2. $S_q(n,a) = \sum\limits_{k=0}^{q} \dbinom{n}{k}\dfrac{a_k}{2^n}$.

$q$ étant fixé, $S_q(n,a)$ est donc une somme finie de termes de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

II.1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a$ est de limite nulle, il existe un rang $q$ tel que $\forall k \geqslant q,\ |a_k| \leqslant \varepsilon/2$.

La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe $n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |S_q(n,a)| \leqslant \varepsilon/2$.

On a alors

$$\forall n \geqslant n_0,\ |a_n^*| = \left|S_q(n,a) + \frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\sum\limits_{k=q+1}^{n}\dbinom{n}{k} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k} \leqslant 2^n$, on a finalement

$$\forall n \geqslant n_0,\ |a_n^*| \leqslant \varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

*Remarque : Il s'agit là de la démonstration classique du célèbre théorème de Césaro !*

II.1.4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - \ell) = 0$.
Or :

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n-\ell) + \underbrace{\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ell}_{=\ell} = b_n^* + \ell \quad \text{où} \quad b_n = a_n - \ell$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^* = 0$ d'après la question précédente et donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n^* = \ell$$

II.1.5. On vient de prouver que la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
En effet, pour $a_n = (-1)^n$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^n = \frac{1}{2^n}(1+(-1))^n = 0$$

Donc ici la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Il n'y a donc pas équivalence entre la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.

## II.2. Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $\mathrm{T}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^*$, $\mathrm{U}_n = 2^n\mathrm{T}_n$.

II.2.1. Il suffit de calculer :

$\mathrm{U}_0 = \mathrm{T}_0 = a_0 = \mathrm{S}_0$

$\mathrm{U}_1 = 2\mathrm{T}_1 = 2(a_0^* + a_1^*) = 2\left(a_0 + \frac{1}{2}(a_0+a_1)\right)) = 2\mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1$

$\mathrm{U}_2 = 4\mathrm{T}_2 = 4(a_0^* + a_1^* + a_2^*) = 4\left(a_0 + \frac{1}{2}(a_0+a_1) + \frac{1}{4}(a_0+2a_1+a_2)\right) = \mathrm{S}_2 + 3\mathrm{S}_1 + 3\mathrm{S}_0$

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_3 = 8\mathrm{T}_3 = 8(a_0^*+a_1^*+a_2^*+a_3^*) &= 8\left(a_0 + \frac{1}{2}(a_0+a_1) + \frac{1}{4}(a_0+2a_1+a_2) + \frac{1}{8}(a_0+3a_1+3a_2+a_3)\right)\\ &= 8\underbrace{a_0}_{=\mathrm{S}_0} + 4\underbrace{(a_0+a_1)}_{=\mathrm{S}_1} + 2\underbrace{(a_0+2a_1+a_2)}_{=\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_1-\mathrm{S}_0} + \underbrace{(a_0+3a_1+3a_2+a_3)}_{=\mathrm{S}_3+2\mathrm{S}_2-2\mathrm{S}_0} = \mathrm{S}_3 + 4\mathrm{S}_2 + 6\mathrm{S}_1 + 4\mathrm{S}_0\end{aligned}$$

II.2.2 .

II.2.2.1. On reconnaît dans les expressions précédentes les coefficients binomiaux.
On peut donc penser que

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k$$

c'est-à-dire $\lambda_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}$.

II.2.2.2. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathrm{H}_n) : \mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k$$

- On vient de voir que cette hypothèse est vérifiée pour $n = 0, 1, 2, 3$.
- Si on suppose $(\mathrm{H}_n)$ réalisée à un certain rang $n$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{n+1} = 2^{n+1}\mathrm{T}_{n+1} = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} a_k^* &= 2\underbrace{\left(2^n\sum_{k=0}^{n} a_n^*\right)}_{=\mathrm{T}_n} + 2^{n+1}a_{n+1}^*\\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\mathrm{S}_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k\\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\mathrm{S}_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(\mathrm{S}_k-\mathrm{S}_{k-1}) \qquad (\text{car } a_k = \mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1})\\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{S}_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k \quad \text{d'après } (\mathrm{H}_n)\\
&= \mathrm{S}_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\left(\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k+1}\right)}_{=\binom{n+2}{k+1}}\mathrm{S}_k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}\mathrm{S}_k
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{H}_n \Longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

II.2.3. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et on note $\mathrm{S}$ sa somme. Grâce à la question précédente, on a

$$\mathrm{U}_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\mathrm{S}_k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k-1} \quad (\mathrm{S}_{-1}=0)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{S}_{n-1} = \mathrm{S}$, la question II.1 donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k-1} = \mathrm{S}$$

ce qui donne $\dfrac{\mathrm{U}_{n-1}}{2^n} \to \mathrm{S}$ ou encore $\mathrm{T}_{n-1} = \dfrac{\mathrm{U}_{n-1}}{2^{n-1}} \to 2\mathrm{S}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

II.2.4. D'après I.2.3, si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge alors que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ converge.

Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^*$ n'ont donc pas toujours même nature.

## Partie III : une étude de fonctions.

III.1. **Etude de $f$.**

III.1.1. $f(x)$ est évidemment définie pour $x=0$ (et $f(0)=1$), et, pour $x\neq 0$ ;

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{x^n}{(n+1)!}}\right| = \frac{|x|}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve, par la règle de d'Alembert, la convergence absolue (donc la convergence) de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$.

Ainsi, $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ (et elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'après la propriété admise dans l'énoncé).

III.1.2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$xf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x-1$$

III.1.3. Donc immédiatement : $\mathrm{e}^{-x}f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ si $x\neq 0$ et vaut $1$ en $0$.

III.2. **Etude de $g$.**

III.2.1. Pour tout entier $n\geqslant 1$ : $\sigma_n\leqslant n$ donc, pour tout $x$ réel : $\left|\dfrac{\sigma_n x^n}{n!}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^n}{(n-1)!}\right|$.

La série de terme général $\dfrac{x^n}{(n-1)!}$ étant absolument convergente (même démonstration que dans III.1.1), il résulte des théorèmes de comparaison des séries à termes réels positifs qu'il en est de même de la série de terme général $\dfrac{\sigma_n x^n}{n!}$.

Ainsi, $g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

III.2.2. D'après les propriétés admises dans l'énoncé, on peut écrire :

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma_n n x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma_{n+1}x^n}{n!}$$

donc

$$g'(x)-g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sigma_{n+1}-\sigma_n)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=f(x)$$

Ainsi : $g'-g=f$.

III.2.3. Les solutions de l'équation différentielle $y'-y=0$ sont de la forme $x\mapsto\lambda\mathrm{e}^x$. On applique la méthode de la variation de la constante pour trouver celles de l'équation $y'-y=f$.
On cherche donc $g(x)$ sous la forme $\lambda(x)\mathrm{e}^x$ ce qui nous conduit à

$\lambda'(x)\mathrm{e}^x=f(x)$ d'où $\lambda'(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$ puis $\lambda(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t+cste$ et enfin

$$g(x)=\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t+cste\right)\mathrm{e}^x$$

Or $g(0)=0$ donc $cste=0$ ce qui donne bien la relation de l'énoncé.

III.3. **La fonction F.**

III.3.1. On sait que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$, donc, d'après III.1.3, on aura, pour $x\neq 0$ :

$$e^{-x}f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!},$$

l'égalité restant vraie pour $x=0$.

On peut alors poser, pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$\mathrm{G}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

la série écrite ci-dessus étant absolument convergente pour les mêmes raisons que dans III.1.1 (règle de d'Alembert).

D'après la propriété admise dans l'énoncé, G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{G}'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}=\mathrm{e}^{-x}f(x)$$

Puisque $\mathrm{G}(0)=0$, on en déduit $\mathrm{G}(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(x)$ et finalement

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}'x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n.n!}$$

III.3.2. $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=e^x\mathrm{F}(x)=\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right).\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n.n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n\frac{x^n}{n!}$.

On effectue le produit de Cauchy des deux séries, qui sont bien absolument convergentes, et on identifie les coefficients (ce qui est permis d'après une propriété admise dans l'énoncé), d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\sigma_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}$$

III.4. **La série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.**

III.4.1. Soit $w_k=\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)-\dfrac{1}{k+1}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

III.4.1.1. On a

$$w_k=-\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{k+1}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2(k+1)^2}$$

puisque $\ln(1+x)-x\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ étant une série à termes positifs convergente, il résulte des théorèmes de comparaison que la série de terme général $w_k$ est elle aussi convergente.

III.4.1.2. Soit $v_n=\sigma_n-\ln(n)$ ; on a $v_n-v_{n+1}=w_n$. Or on sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}(v_n-v_{n+1})$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même nature (*résultat important du cours !*) ; d'après la question précédente, la suite $(v_n)$ est donc convergente.

*Rem : sa limite est la constante d'Euler $\gamma$...*

III.4.2. En regroupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a

$$\tau_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$\sigma_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

En faisant la différence, on obtient

$$\tau_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$$

III.4.3. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \tau_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n=\underbrace{(\sigma_{2n}-\ln(2n))}_{\substack{\longrightarrow\gamma\\ \text{quand } n\to+\infty}}-\underbrace{(\sigma_n-\ln(n))}_{\substack{\longrightarrow\gamma\\ \text{quand } n\to+\infty}}+\underbrace{\ln(2n)-\ln(n)}_{=\ln 2}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\tau_{2n}=\ln 2$.

Or $\tau_{2n+1}-\tau_{2n}=\dfrac{1}{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\tau_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\tau_{2n}=\ln 2$.

La suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente de limite $\ln(2)$, c'est-à-dire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente de somme $\ln(2)$.

III.5. **Etude de la fonction $\phi$.**

III.5.1. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n - \ln n = \gamma$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, on a l'équivalent : $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sigma_{n+1} x^{n+1}}{\sigma_n x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |x| = |x|$$

Il résulte alors de la règle de d'Alembert que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sigma_n x^n$ est absolument convergente si $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

On a donc $R = 1$.

III.5.2. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sigma_n x^n$ diverge grossièrement pour $x = \pm 1$. L'ensemble de définition de $\phi$ est donc l'intervalle $]-1, 1[$.

D'après la propriété admise dans l'énoncé, $\phi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in [0, 1[\,,\ \phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \sigma_n x^{n-1} \geqslant 0$$

et $\phi$ est donc croissante sur $[0, 1[$.

III.5.3. La relation $\gamma_n = \dfrac{\sigma_n}{n!}$ peut s'écrire d'après le résultat de III.3.2 :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Si on pose $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et $a_0 = 0$, on a donc

$$\frac{\sigma_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_n^*$$

La partie II indique alors que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ est convergente de somme égale à deux fois celle de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. On a ainsi

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2\ln(2)$$

III.5.4. Soit $x \in ]-1, 1[$.

Soit $u_k = \dfrac{x^k}{k}$ si $k \geqslant 1$ et $u_0 = 0$ et soit $v_k = x^k$. On a

$$\forall n \geqslant 0,\ \sigma_n x^n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

en ayant posé de plus $\sigma_0 = 0$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sigma_n x^n$ est donc la série produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{x^k}{k}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$. Ces séries étant absolument convergentes lorsque $x \in ]-1, 1[$, le cours indique alors que

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ \phi(x) = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve $\phi(1/2) = 2\ln(2)$.