DM N°4 (pour le 08/11/2011)

Même lorsque cela n'est pas mentionné par l'énoncé, il conviendra de justifier l'existence de toutes les intégrales écrites.

Première partie

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres tels que $a > 0$, $b \neq 0$ et $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$.

On considère la fonction de la variable réelle φ définie par :

$$f(\varphi) = \frac{1}{a + b\cos\varphi}.$$

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles β et B, dont on précisera l'expression en fonction de a et b, telles que :

$$f(\varphi) = \frac{2z}{B(z-\beta)(z-\beta^{-1})}, \quad \text{avec } z = e^{i\varphi} \text{ et } |\beta| < 1.$$

b) Montrer que les sommes

$$\sum_{n=0}^{N} \beta^n e^{in\varphi} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N} \beta^n e^{-in\varphi}$$

ont des expressions simples en fonction de N, β, $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$.

En déduire que les séries

$$\sum_{n\geqslant 0} \beta^n e^{in\varphi} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \beta^n e^{-in\varphi}$$

sont convergentes, et montrer que leurs sommes s'expriment de manière simple en fonction de β, $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$.

c) Établir l'identité

$$\frac{1}{a + b\cos\varphi} = A(a,b)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \beta^n \cos n\varphi\right),$$

où $A(a,b)$ est une constante dont on donnera l'expression en fonction de a et b.

(*on pourra effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle de z obtenue à la question 1.a*).

d) Montrer qu'il existe une suite (u_N) telle que $\lim_{N\to+\infty} u_N = 0$ et vérifiant, pour tout $N \geqslant 1$, l'inégalité

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{a + b\cos\varphi} - A(a,b)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N} \beta^n \cos n\varphi\right) \right| \leqslant u_N.$$

e) En déduire la valeur, exprimée en fonction de $A(a,b)$, de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi}.$$

2. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \pi$.

a) Établir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{1 - 2X\cos\alpha + X^2}.$$

b) Établir la majoration : pour tout $N \geqslant 1$, $|\rho| < 1$ et $0 < \alpha < \pi$:

$$\left|\frac{1}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} - \sum_{n=0}^{N} \rho^n \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right| \leqslant \frac{2|\rho|^{N+1}}{(1-|\rho|)\sin\alpha}.$$

(*on pensera à utiliser les résultats de la question 1.b*).

3. On considère trois constantes réelles μ_1, μ_2 et ρ, vérifiant les inégalités

$$-1 \leqslant \mu_1 < \mu_2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \rho < 1.$$

On définit des constantes a et b et une fonction $\xi = \xi(\varphi)$ de la variable réelle φ par :

$$a = 2\big(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2\big), \quad b = 2\rho(\mu_1-\mu_2), \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2}\Big[\mu_1+\mu_2-(\mu_1-\mu_2)\cos\varphi\Big].$$

a) Exprimer de manière simple en fonction de μ_1, μ_2, ρ et ξ les quantités $a+b$, $a-b$ et $a+b\cos\varphi$. En déduire l'identité

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-2\rho\xi(\varphi)+\rho^2} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\rho\mu_1+\rho^2)(1-2\rho\mu_2+\rho^2)}}.$$

b) Exprimer $1+\cos\varphi$ et $1-\cos\varphi$ de manière simple en fonction de μ_1, μ_2 et ξ. En déduire l'expression de $\sin\varphi$ en fonction de μ_1, μ_2 et ξ lorsque $\varphi \in [0,\pi]$.

c) Comparer les expressions :

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\xi)(\xi-\mu_1)}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\rho\mu_1+\rho^2)(1-2\rho\mu_2+\rho^2)}}.$$

d) On pose désormais $\mu_1 = \cos\theta$, avec $0 < \theta < \pi$, $\mu_2 = 1$ et $\xi = \cos\alpha$. Établir l'identité :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}},$$

pour tout $0 \leqslant \rho < 1$ et $0 < \theta < \pi$.

e) Établir, en justifiant l'existence de la convergence de la série du membre de droite, l'identité :

$$\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha$$

pour $|\rho| < 1$ et $0 < \alpha < \pi$.

f) Déterminer un majorant de

$$\left|\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} - \sum_{n=0}^{N} \rho^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|$$

qui soit indépendant de $\alpha \in]0,\pi[$ et qui tende vers 0 lorsque $N \to +\infty$.

g) Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \pi$.
On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,d\alpha.$$

Montrer que v_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'il existe un nombre $M < \infty$ (dépendant de θ) tel que $|v_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que, pour tout $\left|\rho\right| < 1$ et $0 < \theta < \pi$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N}\rho^n\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,d\alpha\right]\right| = 0\,.$$

4. Pour $0 < \theta < \pi$ fixé, on considère la fonction de $x \in \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}}\,.$$

a) Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que si $g^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de g, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = n!\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ où P_n est un polynôme de degré n.

Établir la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{P}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x\mathrm{P}_n(x) - \frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

(*Rem : les* P_n *s'appellent les polynômes de Legendre*).

b) Établir que, pour tout $0 < \theta < \pi$ et $\left|\rho\right| < 1$, on a l'identité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)\,.$$

c) Vérifier qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une constante $\mathrm{D} < \infty$ tels que, pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, pour tout $\left|\rho\right| \leqslant \varepsilon_0$ et $0 < \theta < \pi$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N-1}\rho^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)\right| \leqslant \mathrm{D}\left|\rho\right|^{N}\,.$$

(*Rem : cette question comporte une légère erreur ; je vous laisse le soin de la trouver et de citer un résultat correct*).

Seconde partie

1. Soit $h(x) = (1-x)^{-1/2}$ pour $x \in \left]-1,1\right[$.

a) Vérifier que h est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$. Si $h^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de h, déterminer $h^{(n)}(x)$ et $h^{(n)}(0)$ en fonction de $(1-x)^{-n-1/2}$, 2^{2n}, $n!$ et $(2n)!$.

b) Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{K} < \infty$ telle que, pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$ et $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, on ait :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!}h^{(n)}(0)\right| \leqslant \mathrm{K}\frac{(2\mathrm{N})!}{2^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}!)^2}\,|x|^{\mathrm{N}}\,.$$

c) En déduire qu'il existe un $\varepsilon > 0$, et pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, une constante $\mathrm{C}_\mathrm{N} < \infty$, tels que, pour tout $\left|\rho\right| \leqslant \varepsilon$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{\left[\rho(2\cos\theta-\rho)\right]^n}{n!}h^{(n)}(0)\right| \leqslant \mathrm{C}_\mathrm{N}\left|\rho\right|^{\mathrm{N}}\,.$$

2. **a)** Montrer que

$$\mathrm{P}_n(x) = a_n(x^n + b_{n,1}x^{n-2} + \cdots + b_{n,k}x^{n-2k} + \cdots),$$

où a_n et $\left\{b_{n,k},\ 1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}\right\}$ sont des constantes que l'on déterminera.

b) Vérifier que les polynômes P_n, $n = 0, 1, \dots$, sont liés par les relations de récurrence :

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x).$$

Troisième partie

Cette partie a pour objet de calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2 + \cos\varphi}$$

par une méthode de quadrature basée sur les sommes de Riemann.

1. À l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, exprimer I sous la forme $I = \int_0^1 \frac{dt}{Q(t)}$ où Q est une fonction que l'on précisera.

2. Donner en MAPLE un programme permettant de calculer

$$I'_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Q\left(\frac{i}{N}\right)} \quad \text{et} \quad I''_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Q\left(\frac{i-1}{N}\right)}$$

en fonction de $N \geqslant 1$.

3. Écrire un programme en MAPLE permettant de calculer I à 10^{-M} près $(1 \leqslant M \leqslant 6)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆