CORRIGÉ DM N°10 : CENTRALE PC, 1991

PARTIE I : Polynômes de Newton

1. • On a : $\Gamma_k(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$; donc, pour x entier compris entre 0 et $k-1$, $\Gamma_k(x)=0$.

• pour x entier supérieur ou égal à k on a : $\Gamma_k(x) = \dbinom{x}{k}$.

• Enfin, pour x entier négatif, si on pose $x=-y$, on a :

$$\Gamma_k(x) = (-1)^k \frac{y(y+1)\cdots(y+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{y+k-1}{k} = (-1)^k \binom{k-1-x}{k}$$

2. On a facilement les égalités :

$$\begin{aligned} n\Gamma_n(X) &= \frac{1}{(n-1)!}\big(X\cdots(X-n+1)\big) = (X-n+1)\Gamma_{n-1}(X) \\ \Gamma_n(X+1)-\Gamma_n(X) &= \frac{1}{n!}\big((X+1)\cdots(X-n+2) - X(X-1)\dots(X-n+1)\big) \\ &= \frac{1}{n!}\big(X\cdots(X-n+2)(X+1-X+n-1)\big) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\big(X\cdots(X-n+2)\big) = \Gamma_{n-1}(X) \end{aligned}$$

PARTIE II :

1. **a)** • On doit avoir $f(0)=a_0\Gamma_0(0)$, donc $a_0=f(0)$.
On doit avoir $f(1)=a_0\Gamma_0(1)+a_1\Gamma_1(1)$, donc $a_1=f(1)-f(0)$.
On a donc bien l'existence et l'unicité de a_0 et a_1.

• Supposons calculés $a_0, a_1, \dots, a_n$. On cherche alors a_{n+1} tel que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k\Gamma_k(x)$ soit nulle pour $x \in [\![0, n+1]\!]$.

Pour $x \in [\![0,n]\!]$, puisque $\Gamma_{n+1}(x)=0$, on a $g(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(x) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.
La relation cherchée équivaut donc à $g(n+1)=0$, et, puisque $\Gamma_{n+1}(n+1)=1$, elle s'écrit
$a_{n+1} = f(n+1) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(n+1)$ ce qui prouve l'existence et l'unicité de a_{n+1}, et démontre le résultat par récurrence sur n.

Remarque : On pouvait aussi faire une démonstration directe, en remarquant que les relations données s'écrivent sous la forme d'un système de $n+1$ équation à $n+1$ inconnues, dont la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc inversible...

b) On démontre le résultat par récurrence sur n ; je reprends les calculs ci-dessus, avec $f(x)=b^x$:

• Pour $n=0$, $a_0=f(0)=1$, et, pour $n=1$, $a_1=f(1)-f(0)=b-1$, donc la relation « $a_n=(b-1)^n$ » est vraie pour $n=0,1$.

• Supposons là vérifiée jusqu'à l'ordre n. Alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(n+1) - \sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(n+1) \\ &= b^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(b-1)^k \\ &= b^{n+1} - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(b-1)^k + (b-1)^{n+1} = b^{n+1} - \big[(b-1)+1\big]^{n+1} + (b-1)^{n+1} = (b-1)^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu à l'ordre $n+1$ et achève la démonstration.

2. a) • Si $x \in [\![0,n]\!]$, $\Gamma_{N+1}(x)=0$ et le résultat est immédiat avec θ quelconque.

• Sinon, soit $\varphi(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(t)-A\Gamma_{n+1}(t)$; cette fonction est définie au moins sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et et est nulle par construction en $t=0,\dots,t=n$.
Puisque $\Gamma_{N+1}(x)$ n'est pas nul, on peut choisir A tel que $\varphi(x)=0$. Alors φ s'annule en $n+2$ points distincts ; le théorème de Rolle entraîne que φ' s'annule en $n+1$ points distincts, etc… jusqu'à $\varphi^{(n+1)}$ qui s'annule au moins une fois en un point θ compris entre $\min(0,x)$ et $\max(n,x)$.
Or, pour $k\in[\![0,n]\!]$, la dérivée $n+1$-ième de Γ_k est nulle puisque Γ_k est un polynôme de degré k, donc $\varphi^{(n+1)}=f^{(n+1)}-A\Gamma_{n+1}^{(n+1)}=f^{(n+1)}-A$ car le terme dominant de Γ_{n+1} est $\dfrac{X^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ainsi $A=f^{(n+1)}(\theta)$, soit : $\boxed{\forall x\ ,\ \exists\theta\ ,\ f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_k\Gamma_k(x)+\Gamma_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta)}$

b) En particulier, il existe un réel λ_n tel que $f(n+1)=\sum_{k=0}^{n}a_k\Gamma_k(n+1)+1.f^{(n+1)}(\lambda_n)=\sum_{k=0}^{n+1}a_k\Gamma_k(n+1)$ soit : $f^{(n+1)}(\lambda_n)=a_{n+1}$ et on peut affirmer que λ_n est positif, parce que $x=n+1$ l'est (voir ci-dessus).
Ainsi, chaque a_n est la valeur de $f^{(n)}$ en un point λ_n de $\mathbb{R}_+$.

PARTIE III : Étude de séries de Newton

1. Soient x réel non entier et ρ réel, et $\mu_n=n^\rho|\Gamma_n(x)|$, $u_n=\ln(\mu_{n+1})-\ln(\mu_n)$.

a) On a $u_n=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\rho\left|\dfrac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)}\right|=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\rho\left|\dfrac{n-x}{n+1}\right|$.

Un développement limité (à l'ordre 1) donne : $u_n=(\rho-x-1)\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; la série de terme général u_n sera donc divergente en général (par équivalence à un terme de série divergente et de signe constant), sauf si $\rho=x+1$ auquel cas $u_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

b) Par télescopage, on a : $\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\ln(\mu_n)-\ln(\mu_0)$; d'où le comportement de μ_n :

- Si $\rho>x+1$, alors μ_n tend vers $+\infty$.
- Si $\rho=x+1$, alors $\ln\mu_n$ tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ et on peut définir : $K(x)=\lim_{n\to\infty}n^{x+1}|\Gamma_n(x)|$ $(K(x)=e^\ell)$.
- Si $\rho<x+1$, alors μ_n tend vers 0 .

2. a) D'après la question II.2.a, $f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_n\Gamma_k(x)=\Gamma_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta)$.

D'après la question précédente et l'hypothèse faite sur f, $\left|\Gamma_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta)\right|\underset{n\to\infty}{=}O\left(M.n.n^{-x-1}\right)$. Comme n^{-x} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour $x>0$, le reste tend vers 0 et on a bien l'égalité (vraie encore pour $x=0$ à cause du choix de a_0) : $\boxed{\forall x>0\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Gamma_k(x)}$

b) Si f est nulle sur $\mathbb{N}$, la suite (a_n) est nulle (d'après les formules obtenues dans la partie II) et f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

3. Puisque x et y ne sont pas des entiers naturels, on a, lorsque $n\to\infty$: $\left|\Gamma_n(x)\right|\sim\dfrac{K(x)}{n^{x+1}}$ et $\left|\Gamma_n(y)\right|\sim\dfrac{K(y)}{n^{x+1}}$, d'où $\dfrac{\left|\Gamma_n(y)\right|}{\left|\Gamma_n(x)\right|}\sim A.n^{x-y}$, où A ne dépend que de x et y, mais pas de n.

Puisque $y>x$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left|\Gamma_n(y)\right|}{\left|\Gamma_n(x)\right|}=0$, donc $\left|\Gamma_n(y)\right|\underset{n\to\infty}{=}o\left(\left|\Gamma_n(x)\right|\right)$, puis $\left|a_n\Gamma_n(y)\right|\underset{n\to\infty}{=}o\left(\left|a_n\Gamma_n(x)\right|\right)$.

D'après les règles de comparaison des séries à termes positifs, si la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\Gamma_n(x)\right|$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\Gamma_n(y)\right|$, c'est-à-dire que la série la série $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma_n(y)$ est absolument convergente.

4. **a)** • Le fait que la suite $(w_n(x)))_{n\geqslant b}$ tende vers 0 a été fait à la question précédente.

• $\dfrac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} = \dfrac{n-x}{n-x_0}$ qui est compris entre 0 et 1 lorsque $n \geqslant b \geqslant x > x_0$; donc : si $w_b(x) > 0$ alors $(w_n(x))$ décroît pour $n \geqslant b$ et est positif ; sinon, $(w_n(x))$ croît pour $n \geqslant b$ et est négatif.

b) Il en résulte que la suite $(|w_n(x)|)_{n\geqslant b}$ est majorée par $|w_b(x)|$; et la fonction w_b est continue sur $[x_0, b]$, donc bornée. Si K désigne la borne supérieure de $\left|w_b\right|$ sur $[x_0, b]$, on a donc, pour tout $x \in]x_0, b]$ et tout $n \geqslant b$, $\left|w_n(x)\right| \leqslant \mathrm{K}$ c'est-à-dire $\left|\Gamma_n(x)\right| \leqslant \mathrm{K}\left|\Gamma_n(x_0)\right|$, et cette inégalité reste évidemment vraie pour $x = x_0$.

c) Soit C un compact de $[x_0, +\infty[$; il existe donc un entier b tel que $\mathrm{C} \subset [x_0, b]$. D'après la question précédente, il existe une constante K telle que, pour tout $x \in \mathrm{C}$ et tout $n \geqslant b$, on ait $\left|a_n\Gamma_n(x)\right| \leqslant \mathrm{K}\left|a_n\Gamma_n(x_0)\right|$, donc $\left\|a_n\Gamma_n\right\|_\infty^{\mathrm{C}} \leqslant \mathrm{K}\left|a_n\Gamma_n(x_0)\right|$.

Il découle alors de l'hypothèse de l'énoncé que la série $\sum \left\|a_n\Gamma_n\right\|_\infty^{\mathrm{C}}$ converge, i.e que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ converge normalement sur C.

5. **a)** En posant $\mathrm{R}_k = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i$, on a $\lambda_k = \mathrm{R}_{k-1} - \mathrm{R}_k$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k \mathrm{V}_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (\mathrm{R}_{k-1} - \mathrm{R}_k)\mathrm{V}_k(x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathrm{R}_{k-1}\mathrm{V}_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathrm{R}_k\mathrm{V}_k(x) \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} \mathrm{R}_k\mathrm{V}_{k+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathrm{R}_k\mathrm{V}_k(x) \\
&= \mathrm{R}_n\mathrm{V}_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \mathrm{R}_k\big(\mathrm{V}_{k+1}(x) - \mathrm{V}_k(x)\big) - \mathrm{R}_{n+p}\mathrm{V}_{n+p}(x)
\end{aligned}$$

[*Il s'agit de la transformation d'Abel...*]

Soit $\varepsilon > 0$. La série $\sum \lambda_n$ étant convergente, la suite des restes (R_n) tend vers zéro, donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\left|\mathrm{R}_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{4\mathrm{M}}$.

Pour tout entier n, notons $\mathrm{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\mathrm{V}_k(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$. Compte tenu de la décroissance de la suite $\big(\mathrm{V}_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $\left|\mathrm{V}_n(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$, la relation démontrée auparavant conduit à

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| &= \left|\mathrm{R}_n\mathrm{V}_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \mathrm{R}_k\big(\mathrm{V}_{k+1}(x) - \mathrm{V}_k(x)\big) - \mathrm{R}_{n+p}\mathrm{V}_{n+p}(x)\right| \\
&\leqslant \mathrm{M}\left|\mathrm{R}_n\right| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|\mathrm{R}_k\right| \left|\mathrm{V}_{k+1}(x) - \mathrm{V}_k(x)\right| + \mathrm{M}\left|\mathrm{R}_{n+p}\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \big(\mathrm{V}_k(x) - \mathrm{V}_{k+1}(x)\big) + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}}\big(\mathrm{V}_{n+1}(x) - \mathrm{V}_{n+p}(x)\big) + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}} \cdot 2\mathrm{M} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Cela montre que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, la suite $\big(\mathrm{S}_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle converge. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\mathrm{V}_n(x)$ converge simplement sur I.

De plus, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient une majoration du reste de cette série par ε indépendamment de x, ce qui prouve la convergence uniforme.

Rem : On obtient exactement la même conclusion si on remplace l'hypothèse « la suite $n \longmapsto \mathrm{V}_n(x)$ est décroissante » par « la suite $n \longmapsto \mathrm{V}_n(x)$ est monotone ». En effet, ce qui est important dans la démonstration ci dessus est que la série $\sum \left|\mathrm{V}_{k+1}(x) - \mathrm{V}_k(x)\right|$ soit télescopique.

b) On suppose donc ici que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x_0)$ converge.

Si C est un compact de $[x_0, +\infty[$, il existe b tel que $C \subset [x_0, b]$. On reprend les notations et les résultats de la question III.4.

Prenons $\lambda_n = a_n\Gamma_n(x_0)$ et $V_n(x) = w_n(x)$. On vient de supposer la convergence de la série de terme général λ_n, et on a prouvé que, si $x \in [x_0, b]$, $(V_n(x))$ est monotone à partir du rang b, et $|V_n| \leqslant K$.

Ainsi, puisque $\lambda_n V_n(x) = a_n\Gamma_n(x)$, $\sum_{k=b}^{\infty} a_k\Gamma_k(x)$ converge uniformément sur $[x_0, b]$, donc sur le compact C, et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Gamma_k(x)$ fait de même.

c) Si on reprend les calculs de la question III, on voit qu'il existe une constante A (ne dépendant que de x et x_0) telle que $|w_n(x)| = \dfrac{|\Gamma_n(x)|}{|\Gamma_n(x_0)|} \underset{n\to\infty}{\sim} A.n^{x_0-x}$, soit $|a_n\Gamma_n(x)| \sim A \cdot |a_n\Gamma_n(x_0)| \cdot n^{x_0-x}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\Gamma_n(x_0) = 0$ (car la série converge), on en tire $|a_n\Gamma_n(x)| = o\left(\dfrac{1}{n^{x-x_0}}\right)$, ce qui prouve la convergence absolue de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ lorsque $x - x_0 > 1$, par comparaison à une série de Riemann.

PARTIE IV :

1. a) Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi(t) = (1+t)^x$ pour $t \in]-1, 1[$. φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. On peut donc écrire pour cette fonction la formule de Taylor avec reste intégrale, entre 0 et t, à tout ordre n :

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \int_0^t \frac{(h-u)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(u)\,du$$

Or $\varphi^{(k)}(u) = x(x-1)\dots(x-k+1).(1+u)^{x-k}$ d'où :

$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k(x) t^k + R_n(t, x)$ où $R_n(t, x) = (n+1)\Gamma_{n+1}(x) \int_0^t (t-u)^n (1+u)^{x-n-1}(u)\,du$

b) La fonction $u \mapsto \dfrac{t-u}{1+u}$ est homographique donc, sur l'intervalle $[0, t]$, elle atteint ses extrema en 0 et en t ; par suite, $\sup\limits_{u\in[0,t]} \left|\dfrac{t-u}{1+u}\right| = |t|$.

On a donc $|R_n(t, x)| \leqslant (n+1)|\Gamma_{n+1}(x)|\,|t|^n \left|\int_0^t (1+u)^{x-1}\,du\right|$, et il est facile de voir que cette expression tend vers 0 quand $n \to \infty$, en utilisant l'équivalent obtenu en III.1 : $|\Gamma_n(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{K(x)}{n^{x+1}}$ lorsque x non entier (si x est entier, on a de toutes façons $\Gamma_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang !).

Rem : Je n'ai pas trop détaillé cette démonstration, puisqu'il s'agit exactement de celle faite en classe pour trouver le développement en série entière de $t \mapsto (1+t)^x$...

2. Pour $|t| > 1$ et x non entier naturel, la série diverge, puisque $t^n |\Gamma_n(x)|$ est équivalent à $K(x)t^n n^{-x-1}$ de limite infinie.

3.
- Si x est un entier naturel, $\Gamma_n(x) = 0$ dès que $n \geqslant x+1$, donc la série converge !
- Sinon, $|\Gamma_n(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{K(x)}{n^{x+1}}$, donc la série diverge grossièrement si $x \leqslant -1$.
- Enfin, si $x > -1$, on peut reprendre le calcul fait dans la question précédente avec $t = 1$; on a alors $|R_n(1, x)| \leqslant (n+1)|\Gamma_{n+1}(x)| \left|\int_0^1 (1+u)^{x-1}\,du\right|$, qui tend vers 0 quand $n \to \infty$, grâce à l'équivalent ci-dessus.

En conclusion, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(x)$ converge si et seulement si $x > -1$ et, dans ce cas, sa somme vaut 2^x.

Rem : je n'ai pas utilisé ici l'indication de l'énoncé...

4.
- La série $\sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma_n(x)|$ converge si et seulement si $x \geqslant 0$, toujours grâce à l'équivalent $|\Gamma_n(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{K(x)}{n^{x+1}}$ (pour x non entier), et par comparaison à une série de Riemann.

- Pour $x \leqslant -1$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Gamma_n(x)$ est grossièrement divergente (voir ci-dessus).
- Prenons donc $x \in]-1,0[$. Alors $\Gamma_n(x) = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ est du signe de $(-1)^n$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Gamma_n(x)$ est à termes positifs, et, compte tenu de l'équivalent de $\left|\Gamma_n(x)\right|$, elle diverge.
- Enfin, si x est entier, la somme est nulle puisque on retrouve le développement par la formule du binôme de $(1-1)^x$.

5. D'après tout ce qui précède, $\varphi_x(u) = (1-u)^x$ pour tout $u \in [0,1[$.

La convergence normale sur $[0,1]$ de cette série de fonctions de u équivaut à la convergence de la série $\sum\left|\Gamma_n(x)\right|$, qui est réalisée pour $x \geqslant 0$ comme cela a déjà été dit.

La convergence normale implique la convergence uniforme, donc implique la continuité de φ_x sur $[0,1]$. Puisque φ_x coïncide avec $u \mapsto (1-u)^x$ sur $[0,1[$, les deux fonctions coïncident également en 1, donc $\sigma(x) = 0$ pour $x \geqslant 0$.

PARTIE V :

1. On pose : $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t$. On sait que pour $x > 0$ on a : $(1+t)^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Gamma_n(x)$, et que cette convergence est normale *en* t (pas en x !) sur $[-1,0]$ (cf. IV.5).

On a donc $(1+t)^x h(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Gamma_n(x)h(t)$, et la convergence est encore normale en t (donc uniforme), puisque h est continue donc bornée sur $[0,1]$.

On peut donc intervertir série et intégrale, d'où :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(x)\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t$$

2. **a)** L'énoncé est ici imprécis. Il faut évidemment considérer $t \in]-1,0]$. On a alors $\mathrm{R}_n(t,x) = (1+t)^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k\Gamma_k(x)$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} h(t)\mathrm{R}_n(t,x)\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t$, i.e $f(x)$ existe (ce qui aurait du être demandé au début !).

Cela dit, cette intégrale existe pour $x > -1$, puisque h est continue donc bornée sur $[-1,0]$, par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^x\,\mathrm{d}t$.

b) On a $\mathrm{R_N}(t,x) = (\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x)\displaystyle\int_0^t \left(\frac{t-u}{1+u}\right)^{\mathrm{N}}(1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u$.

Le changement de variable $s = \dfrac{t-u}{1+u}$ conduit à $u = \dfrac{t-s}{1+s}$, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1+t}{(1+s)^2}\,\mathrm{d}s$ puis

$$\mathrm{R_N}(t,x) = (\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x)\int_0^t s^{\mathrm{N}}\left(\frac{1+t}{1+s}\right)^{x-1}\frac{1+t}{(1+s)^2}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x)(1+t)^x\int_0^t \frac{s^{\mathrm{N}}}{(1+s)^{x+1}}\,\mathrm{d}s$$

c) On écrit : $\mathrm{R_N}(t,x)\cdot h(t) = \mathrm{K}\cdot(1+t)^x h(t) r_{\mathrm{N}}(t) = \mathrm{K}\mathrm{H}'(t)r_{\mathrm{N}}(t)$ avec $\mathrm{K} = (\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x)$ d'où :

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{R_N}(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}\Big[\mathrm{H}(t)r_{\mathrm{N}}(t)\Big]_{-1}^{0} - \mathrm{K}\int_{-1}^{0}(t+1)^{-x-1}t^{\mathrm{N}}\mathrm{H}(t)\,\mathrm{d}t$$

d) • Si $\mathrm{M} = \sup\{|h(t)|,\ t \in [-1,0]\}$, on a , puisque $x > -1$

$$\forall t \in]-1,0],\ |\mathrm{H}(t)| \leqslant \mathrm{M}\int_{-1}^{t}(1+s)^x\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{M}}{x+1}(1+t)^{x+1}$$

donc $\left|\mathrm{H}(t)(1+t)^{-x-1}\right|$ est bornée. On notera C un majorant.

- On a :
$$\int_{-1}^{0}(1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N}\int_{-1}^{0}t^k\Gamma_k(x)h(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}R_N(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t$$
et il suffit de montrer que la dernière intégrale tend vers 0.
Or $\left|\int_{-1}^{0}R_N(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant(N+1)\left|\Gamma_N(x)\right|\int_{-1}^{0}\left|H(t)(1+t)^{-x-1}t^N\right|\,\mathrm{d}t\leqslant C.(N+1)\left|\Gamma_N(x)\right|\int_{-1}^{0}t^N\,\mathrm{d}t$, ce qui permet de conclure puisque $\Gamma_{N+1}(x)$ tend vers 0 quand $n\to\infty$ puisque $x>-1$ et $\left|\Gamma_{N+1}(x)\right|\sim K.n^{-x-1}$.

3. **a)** Avec $h(t)=(1+t)^\lambda$, par comparaison à une intégrale de Riemann, $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^{-\lambda-x}}$ existe si et seulement si $-\lambda-x<1$ soit $x>-\lambda-1$, et on calcule aisément $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^{\lambda+x}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda+x+1}$ si $x>-\lambda-1$.

b) $a_n=\displaystyle\int_{-1}^{0}t^n(1+t)^\lambda\,\mathrm{d}t=-\frac{n}{\lambda+1}\int_{-1}^{0}t^{n-1}(1+t)^{\lambda+1}\,\mathrm{d}t=\ldots=\frac{n!}{(-\lambda-1)\ldots(-\lambda-n-1)}=\frac{1}{(n+1)\Gamma_{n+1}(-\lambda-1)}$

c) L'égalité $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma_n(x)$ n'est rien d'autre que la relation **(1)**. Il suffit donc d'appliquer le résultat de la question IV.2.d. (ce qui est possible, h étant bien continue sur $[-1,0]$.

d)
- L'égalité $f(x)=\displaystyle\frac{1}{x+\lambda+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma_n(x)}{(n+1)\Gamma_{n+1}(-\lambda-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma_n(x)$ a lieu au moins si $x>-1$ d'après ce qui précède. Elle est donc vraie également pour les entiers naturels, ce qui prouve que la suite (a_n) est bien celle associée à f au sens de la définition donnée dans la partie II, puisque, si $x\in[\![0,N]\!]$,
$f(x)-\displaystyle\sum_{n=0}^{N}a_n\Gamma_n(x)=f(x)-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma_n(x)=0.$
- La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma_n(x)$ ne peut converger pour $x\leqslant-\lambda-1$, car sinon, d'après III.5.b, elle devrait aussi converger en $x=-\lambda-1$, ce qui est exclu car pour $x=-\lambda-1$, $a_n\Gamma_n(x)=\displaystyle\frac{\Gamma_n(x)}{(n+1)\Gamma_{n+1}(-\lambda-1)}=\frac{1}{n+1}$.
- Enfin, supposons $x>-\lambda-1$. D'après III.1.c, il existe une constante A, ne dépendant que de x, telle que $\displaystyle\frac{\left|\Gamma_n(x)\right|}{\left|\Gamma_n(-\lambda-1)\right|}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{A}{n^{x+\lambda+1}}$ donc $\displaystyle\left|\frac{\Gamma_n(x)}{(n+1)\Gamma_{n+1}(-\lambda-1)}\right|\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{A}{n^{x+\lambda+2}}$, et la série est en fait absolument convergente puisque $x+\lambda+2>1$.
Conclusion : La relation **(1)** est valable pour $x>-\lambda-1$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆