PSI* 11-12

DM n° 5 (pour le 25/11/2011)

PREMIERE PARTIE

Note : La question 2.b. de cette partie est sans incidence sur la suite du problème.

1) Pour tout entier n positif ou nul exprimer $\sin^n(a)$ comme combinaison linéaire des cosinus et des sinus des arcs multiples de a. On aura intéret à utiliser la relation :

$$2\,i\,\sin(a) = e^{ia} - e^{-ia}$$

puis dévelloper $(e^{ia} - e^{-ia})^n$ par la formule du binôme. On distinguera selon la parité de n.

2) A chaque couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on associe la fraction rationelle :

$$\mathbf{F}_{p,q} = \frac{1+(-1)^{p-1}x^{2p}}{(1+x^2)^q}$$

a. Pour q=1, et pour chaque entier p>0 calculer l'intégrale:

$$\mathbf{H}_p = \int_0^1 \mathbf{F}_{p,1}\,dx$$

b. Donner, en fonction de p et q, la décomposition en éléments simples sur le corps des nombres réels de $\mathbf{F}_{p,q}$.

DEUXIEME PARTIE

1) A tout entier $n \geq 1$ on associe le nombre

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} dx$$

et on pose :

$$I_0 = 0$$

Justifier que chacun des nombres I_n est bien défini.

a. Calculer $I_{2p+1} - I_{2p-1}$ et en déduire la valeur de I_{2p+1}.

b. Calculer $I_{2p} - I_{2p-2}$ et en déduire une expression de I_{2p}. Vérifier que I_{2p} est rationel.

c. On considère l'intégrale H_p introduite dans la première partie. Comparer H_p et I_{2p}.
Montrer que quand $p \to +\infty$, H_p tend vers une limite finie que l'on précisera. Pour celà on pourra par exemple diviser l'intervalle d'intégration en deux parties, choisies de telle sorte que l'on puisse majorer séparémént chacune des intégrales correspondantes.
Déduire la limite de I_{2p} quand $p \to +\infty$.

2) A tout entier $n \geq 1$ on associe le nombre

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$$

et on pose : $J_0 = 0$. Justifier que chacun des nombres J_n est bien défini. Calculer $J_n - J_{n-2}$ et en déduire J_n en fonction de n.

TROISIEME PARTIE

1) Montrer que l'intégrale :

$$K_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

a un sens. Pour celà, soit on étudiera la série de terme général

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

soit on utilisera une intégration par parties. Tout réponse consistant à appliquer directement un théorème "connu" à K_1 ne sera pas prise en compte par le correcteur.

L'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ a-t-elle un sens ?

2) A tout réel non nul de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on associe : $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ et on pose $h(0) = 0$.

Montrer que h est continue en $x = 0$ et étudier ses variations sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ il pourra être utile d'introduire la fonction $u(x) = x - \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$ et d'étudier le signe de $u'(x)$ en posant $t = \sqrt{\cos(x)}$.

3) Soient f et g deux fonctions réelles de la variable réelle x définies et continues sur l'intervalle fermé $[a,b]$ avec $a<b$.

On suppose que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Soient m et M les bornes, respectivement inférieure et supérieure, de f sur $[a,b]$. Montrer que :

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

et en déduire l'existence d'un réel c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[a,b]$?

4) Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) \sin(2n+1)x \, dx$$

tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. Pour celà on pourra considérer une partition de l'intervalle d'intégration en sous-intervalles où $\sin(2n+1)x$ garde un signe constant et utiliser le résultat précédent.

5) Déduire la valeur de K_1.

QUATRIEME PARTIE

1) A tout entier $n>0$ on associe le nombre :

$$K_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^n} dx$$

Montrer que cette intégrale à un sens et que quelque soit $n>0$, $K_n > 0$.

2) Montrer que

$$K_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{d^{n-1} \sin^n(x)}{dx^{n-1}} \, dx$$

En utilisant les résultats de la première partie, et selon la parité de n, calculer K_n. Montrer que $\frac{K_n}{\pi}$ est toujours rationel.

3) Montrer que $K_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour celà on étudiera séparément les intégrales :

$$\int_0^{1} \frac{\sin^n(x)}{x^n} dx \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^n} dx$$

CINQUIEME PARTIE

1) On pose

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$$

Montrer que A_n est une fonction décroissante de n qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

2) Trouver une relation liant A_n et A_{n-2} et en déduire que :

$$n\, A_n\, A_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

3) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n} = 1$$

4) Déduire de ce qui précède que quand $n \to +\infty$, $A_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

5) Pour tout x de $[0,1]$ montrer que :

$$\frac{\sin(x)}{x} \geq 1 - x^2$$

6)

a. Etablir l'inégalité :

$$K_{2p} \geq \int_0^1 \frac{\sin^{2p}(x)}{x^{2p}}\, dx$$

Et déduire que : $K_{2p} \geq A_{4p+1}$.

b. Quelle est la nature de la série de terme général K_n ?