CORRIGÉ : CCP PSI 2006

Partie I.

1.1. D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$

1.2. On a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^*=1$.

1.3. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ sont grossièrement divergentes (le terme général ne tend pas vers 0).

2.1. La formule du binôme donne

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^*=\frac{1}{2^n}(z+1)^n$$

2.2.1. On «sait» calculer les sommes de suite géométriques. La raison z étant différente de 1,

$$\sum_{k=0}^{n}z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Pour $|z|<1$, ce terme admet une limite. $\sum(a_n)$ converge et

$$\mathrm{A}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}$$

2.2.2. On a $\left|\frac{z+1}{2}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{2}<1$ et $\sum(a_n^*)$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme

$$\sum_{n\geqslant 0}a_n^*=\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{2}{1-z}=2\mathrm{A}(z)$$

2.3.1. La série $\sum(a_n)$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

2.3.2. Si $z=-2$ alors $a_n^*=(-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

2.3.3. (a_n^*) est une suite géométrique de raion $r=\frac{e^{i\theta}+1}{2}=\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\theta\in]0,\pi[$, $|r|\in]0,1[$ et $\sum(a_n^*)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_k^*=\frac{1}{1-r}=\frac{2}{1-e^{i\theta}}=\frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)}=1+i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Partie II.

1.1.1. On a

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^k}{k!}$$

1.1.2. Par croissance comparées, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=0$$

1.2. q étant fixé, $\mathrm{S}_q(n,a)$ est alors une somme finie de suites de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_q(n,a)=0$$

1.3. Soit $\varepsilon>0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k\geqslant q,\ |a_k|\leqslant\varepsilon/2$. La suite $\mathrm{S}_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0,\ |\mathrm{S}_q(n,a)|\leqslant\varepsilon/2$. On a alors

$$\forall n\geqslant n_0,\ |a_n^*|=\left|\mathrm{S}_q(n,a)+\frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\leqslant 2^n$, on a finalement

$$\forall n\geqslant n_0,\ |a_n^*|\leqslant\varepsilon$$

et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^*=0$$

1.4. On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l)$$

et on se ramène au cas précédent ($a_n - l \to 0$). Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$$

Rem : Il s'agissait ici, dans un cas particulier, du théorème de Césaro...

1.5. Si $a_n = (-2)^n$ alors $a_n^* = \frac{1}{2^n}(1-2)^n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ donc ici (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2.1. Le calcul donne

$$a_0^* = a_0,\ a_1^* = \frac{a_0+a_1}{2},\ a_1^* = \frac{a_0+2a_1+a_2}{4},\ a_3^* = \frac{a_0+3a_1+3a_2+a_3}{8}$$

puis

$$\mathrm{U}_0 = a_0,\ \mathrm{U}_1 = 3a_0+a_1,\ \mathrm{U}_2 = 7a_0+4a_1+a_2,\ \mathrm{U}_3 = 15a_0+11a_1+5a_2+a_3$$

d'où

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{S}_0,\ \mathrm{U}_1 = 2\mathrm{S}_0+\mathrm{S}_1,\ \mathrm{U}_2 = \mathrm{S}_2+3\mathrm{S}_1+3\mathrm{S}_0,\ \mathrm{U}_3 = \mathrm{S}_3+4\mathrm{S}_2+6\mathrm{S}_1+4\mathrm{S}_0$$

2.2.1. On peut donc supposer que

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\mathrm{S}_k$$

2.2.2. La formule précédente est vraie pour $n = 0,1,2,3$. Soit $n \geqslant 3$ tel que la formule soit vraie jusqu'au rang $n-1$. On remarque que

$$\mathrm{U}_n = 2^n\mathrm{T}_n = 2\mathrm{U}_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right)\mathrm{S}_k + \mathrm{S}_n$$

Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)\mathrm{S}_k + \mathrm{S}_n$$

La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.

2.3. On suppose que $\sum(a_n)$ converge et on note S sa somme. On a donc $\mathrm{S}_n \to \mathrm{S}$ quand $n \to +\infty$. Avec la question précédente, on a

$$\mathrm{U}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_1$$

Comme $\mathrm{S}_{n+1} \to \mathrm{S}$, la question II.1 indique que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{S}_{k+1} = \mathrm{S}$$

ce qui donne $\frac{\mathrm{U}_{n-1}+\mathrm{S}_1}{2^n} \to \mathrm{S}$ ou encore $\mathrm{T}_{n-1} = \frac{\mathrm{U}_{n-1}}{2^{n-1}} \to 2\mathrm{S}$. La série $\sum(a_n^*)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

2.4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum(a_n)$ diverge alors que $\sum(a_n^*)$ converge. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ n'ont donc pas toujours même nature.

Partie III.

1.1. Pour tout réel x la suite $(x^n/(n+1)!)$ est de limite nulle et donc bornée. La série entière $\sum(x^n/(n+1)!)$ est donc de rayon de convergence infini et f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est même, comme somme de série entière, de classe $\mathscr{C}\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.2. On a

$$\forall x,\ f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=e^x-1$$

1.3. On en déduit que

$$\forall x\neq 0,\ e^{-x}f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$$

En 0, la fonction prend la valeur 1 ($f(0)=1$).

2.1. On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{\sigma_n x^n}{n!}\right|\leqslant\frac{n|x|^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

La série entière : $\sum\frac{\sigma_n}{n!}x^n$ est donc de rayon de convergence infini. g est donc définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.2. On peut dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. Ainsi (on tient compte de $\sigma_0=0$)

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)-g(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sigma_{n+1}}{n!}x^n-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sigma_n}{n!}x^n=1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{(n+1)!}=f(x)$$

2.3. On a ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)e^{-x}-g(x)e^{-x}=f(x)e^{-x}$$

En primitivant (avec les primitives nulles en 0) on a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=e^x\int_0^x f(t)e^{-t}\,dt$$

3.1. F est une primitive de $x\mapsto e^{-x}f(x)$. Or, d'après III.1,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n-1}$$

On peut primitiver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. Comme $\mathrm{F}(0)=0$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n.n!}x^n$$

3.2. On a $g(x)=e^x\mathrm{F}(x)$. Dérivons cette égalité n fois (avec la formule de Leibnitz) et prenons la valeur en 0. On obtient

$$g^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{F}^{(k)}(0)$$

Or, si h est la somme de la série entière $\sum(b_kx^k)$ alors $b_k=k!h^{(k)}(0)$. Ainsi, l'égalité précédente s'écrit

$$\forall n\geqslant 1,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=n!\gamma_n$$

4.1.1. On a

$$w_k=-\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{k+1}\sim\frac{1}{2(k+1)^2}$$

et c'est donc le terme général d'une série absolument convergente.

4.1.2. Soit $v_n=\sigma_n-\ln(n)$; on a $v_n-v_{n+1}=w_n$. Or, la série $\sum(v_n-v_{n+1})$ et la suite (v_n) ont même nature et donc (v_n) est une suite convergente.

4.2. En regroupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a

$$\tau_{2n}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$\sigma_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

En faisant la différence, on obtient

$$\tau_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$$

4.3. Notons l la limite de $(\sigma_n - \ln(n)) = (v_n)$. On a

$$v_{2n} - v_n = \sigma_{2n} - \sigma_n - \ln(2) = \tau_{2n} - \ln(2)$$

Cette quantité étant de limite $l - l = 0$, on a donc $\tau_{2n} \to \ln(2)$. Par ailleurs $\tau_{2n+1} - \tau_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et donc $\tau_{2n+1} \to \ln(2)$. Finalement, la suite τ est convergente de limite $\ln(2)$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

5.1. $(\sigma_n - \ln(n))$ admettant une limite finie, on a $\sigma_n \sim \ln(n)$. Ainsi, $(x^n \sigma_n)$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$. Le rayon de convergence R est donc égal à 1.

5.2. Comme $\sigma_n \to +\infty$, $\sum \sigma_n$ et $\sum (-1)^n \sigma_n$ divergent et $\Delta =]-1, 1[$. On peut dériver terme à terme la série entière pour obtenir

$$\forall x \in [0, 1[, \ \phi'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n \sigma_n x^{n-1} \geqslant 0$$

et ϕ est donc croissante sur $[0, 1[$.

5.3. La relation $\gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}$ peut s'écrire

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Si on pose $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et $a_0 = 0$, on a donc

$$\frac{\sigma_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_n^*$$

La partie II indique alors que $\sum (a_n^*)$ est convergente de somme égale à deux fois celle de $\sum (a_n)$. On a ainsi

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2 \ln(2)$$

5.4. Soit $u_k = \frac{1}{k}$ si $k \geqslant 1$ et $u_0 = 1$. Soit w la suite constante égale à 1. On a

$$\forall n \geqslant 0, \ \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k w_{n-k} = (u * w)_n$$

où $u * w$ désigne le produit de Cauchy de u par w. Le cours indique alors que

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \phi(x) = \sum_{k \geqslant 0} u_k x^k \sum_{k \geqslant 0} x^k = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

On retrouve $\phi(1/2) = 2 \ln(2)$.