DS n°2 (le 08/10/2011)

Calculatrices non autorisées.

QUESTIONS DE COURS : E3A PSI 2008

Question 1.

Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies, ou fausses ?

En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre-exemple.

1. (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow$ (u_n) converge vers 0.

3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

4. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Question 2.

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

PROBLÈME : CCP PSI 2006

Notations.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ son module.

Pour tout entier naturel n, on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
- $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$,
- $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k élément d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [\![0,n]\!]$.

On rappelle :

- la valeur de $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$,
- la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Enfin, si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Objectifs.

Dans les parties I et II, on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction ϕ à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Étude d'un procédé de sommation

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.
Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.

A toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

Partie I : deux exemples.

I.1. **Cas d'une suite constante.**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. Expliciter $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2. **Cas d'une suite géométrique.**

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2. On suppose que $|z| < 1$.

1.2.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et expliciter sa somme $\mathrm{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1.2.2.2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $\mathrm{A}(z)$.

I.2.3. On suppose que $|z| \geqslant 1$.

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$?

I.2.3.2. Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation.

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

II.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

II.1.1.1. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2. Soit a une suite réelle et q un entier naturel <u>fixé</u>.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4. On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1. Pour $n \in [\![0,3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$(\mathscr{E})\quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question II.2.1 ?

II.2.2.2. Établir la formule $(\mathscr{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. La convergence de la série $\sum a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?

Les résultats suivants seront admis pour la suite du problème :

Si (a_n) est une suite à termes complexes telle que il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R,R[$, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est convergente, alors, si l'on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout réel $x \in]-R,R[$, on a les propriétés suivantes :

– f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

– Pour tout $x \in]-R,R[$, on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

– $f = 0$ sur $]-R,R[\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Partie III : une étude de fonctions.

On rappelle que : $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\ ;\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!}\ ;\ \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

III.1. **Etude de f.**

III.1.1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

III.1.2. Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

III.1.3. Expliciter $e^{-x}f(x)$ pour tout x réel.

III.2. **Etude de g.**

III.2.1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.

III.2.2. *D'après la propriété admise au début de cette partie, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
Exprimer $g' - g$ en fonction de f.

III.2.3. En déduire que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

III.3. **La fonction F.**

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

III.3.1. Justifier rigoureusement l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n.n!}$$

III.3.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{kk!(n-k)!}$. Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n.

Indication : On pensera à utiliser le produit de Cauchy de deux séries.

III.4. **La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\ln(n)$ le logarithme népérien de n.

III.4.1. Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1.1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} w_k$ est convergente.

III.4.1.2. En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

III.4.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

III.4.3. Montrer en utilisant III.4.1 et III.4.2 que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III.5. **Etude de la fonction ϕ.**

III.5.1. Déterminer le plus grand réel $R > 0$ tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sigma_n x^n$ soit convergente pour tout $x \in]-R, R[$..

III.5.2. Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, R[$.

III.5.3. **Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.**

En utilisant les résultat de la partie II et de la question III.4.3 expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.5.4. Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.