DM N°10 (pour le 01/03/2011)

Préambule

Pour tout entier naturel k, on définit les polynômes Γ_k par :

$$\Gamma_0 = 1\ ,\ \Gamma_1 = \mathrm{X}\ ,\ \Gamma_2 = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2}\ \ldots\ \Gamma_k = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-k+1)}{k!}$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$$

où x est une variable réelle et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle .

PARTIE I :

On établit dans cette partie des propriétés des polynômes Γ_k utiles pour la suite.

1. Calculer $\Gamma_k(x)$ $(k \geqslant 1)$ pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$ *(on distinguera 3 cas)*.

2. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$, les formules :

$$\Gamma_n(\mathrm{X}+1) - \Gamma_n(\mathrm{X}) = \Gamma_{n-1}(\mathrm{X}) \quad \text{et} \quad n\Gamma_n(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-n+1)\Gamma_{n-1}(\mathrm{X})$$

PARTIE II :

1. Soit f une application de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\alpha \leqslant 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et une seule possédant la propriété suivante : pour tout n, la fonction

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k(x)$$

est nulle pour x égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

[On pourra procéder par récurrence sur n]

La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sera dite associée à la fonction f.

b) Montrer que la suite associée à la fonction $x \longmapsto b^x$ $(b > 0)$ est : $a_n = (b-1)^n$.

2. **a)** On suppose de plus ici que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et (a_n) désigne toujours la suite associée à f. On donne un réel $x \geqslant \alpha$. Montrer qu'il existe, pour tout entier naturel N, un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k \Gamma_k(x) \ +\ \Gamma_{\mathrm{N}+1}(x) f^{(\mathrm{N}+1)}(\theta)$$

[Etudier d'abord le cas $x \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{N}\}$.

Sinon, on pourra utiliser la fonction auxiliaire qui à t associe $f(t) - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k \Gamma_k(t) \ -\ \mathrm{A}\Gamma_{\mathrm{N}+1}(t)$,

où A est une constante convenablement choisie, et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.]

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un réel positif λ_n tel que $a_n = f^{(n)}(\lambda_n)$.

PARTIE III :

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite donnée de nombres réels. On lui associe la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$.
Dans cette partie, on étudie des propriétés de cette série.

1. Soit x un réel fixé, non égal à un entier naturel. On considère la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\mu_n = n^{\rho}\left|\Gamma_n(x)\right|$$

a) Étudier, selon le réel ρ, la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$$

b) Que peut-on dire de la limite de la suite (μ_n) ? (discuter selon les valeurs de ρ).

c) Montrer qu'il existe un réel strictement positif $\mathrm{K}(x)$ tel que l'on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x+1}\left|\Gamma_n(x)\right| = \mathrm{K}(x)$$

(on ne cherchera pas à calculer $\mathrm{K}(x)$).

2. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

> Il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout y positif et tout entier n supérieur ou égal à n_0, on ait : $\left|f^{(n)}(y)\right| \leqslant \mathrm{M}n$
> M étant une constante strictement positive.

a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite associée à f selon la définition donnée en II.1.a . Montrer que l'on a, pour tout réel positif x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$$

[Indication : utiliser II.2.a et la question précédente]

b) Que peut-on dire de f si cette fonction est nulle pour tout entier naturel ?

3. Soient x et y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. Que dire de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(y)$ si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ converge absolument ?

4. Soit x_0 un réel non entier naturel, b un entier strictement supérieur à $|x_0|$. Soit x un réel appartenant à $]x_0, b]$. On pose :

$$w_n(x) = \frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_n(x_0)}$$

a) Établir que la suite $(w_n(x)))_{n\geqslant b}$ est monotone et tend vers zéro.

b) En déduire l'existence d'une constante K telle que, pour tout x appartenant à $[x_0, b]$ et pour tout $n \geqslant b$, on ait :

$$\left|\Gamma_n(x)\right| \leqslant \mathrm{K}\left|\Gamma_n(x_0)\right|$$

c) Montrer que, si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x_0)$ converge absolument, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ converge normalement sur tout compact de $[x_0, +\infty[$

5. **a)** Démontrer le théorème suivant :

✓ Soit une série numérique convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$, et une suite $(\mathrm{V}_n)_{n\geqslant 0}$ d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, telle que :

- pour tout x de I, la suite $n \longmapsto \mathrm{V}_n(x)$ est décroissante
- il existe M réel tel que, pour tout x de I et tout entier naturel n, $\left|\mathrm{V}_n(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$.

✓ Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mathrm{V}_n(x)$ converge uniformément dans I

[A cet effet, on pourra poser $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k$, puis démontrer la relation

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k \mathrm{V}_k(x) = \mathrm{R}_n \mathrm{V}_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \mathrm{R}_k \big(\mathrm{V}_{k+1}(x) - \mathrm{V}_k(x)\big) - \mathrm{R}_{n+p} \mathrm{V}_{n+p}(x)$$

et ensuite utiliser le critère de Cauchy uniforme]

b) Déduire de ce théorème et de III.4 que, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ converge en un point x_0 (x_0 non entier naturel), alors elle converge uniformément sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

c) Montrer de plus qu'il y a convergence absolue sur $]x_0 + 1, +\infty[$

PARTIE IV :

On considère, dans cette partie, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \Gamma_n(x)$$

1. On suppose ici $|t| < 1$.

a) Établir, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, la relation, pour tout entier N et tout réel x :

$$(1+t)^x = \sum_{0\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} t^n \Gamma_n(x) + \mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x)$$

$$\text{où} \qquad \mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x) = (\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x) \int_0^t \left(\frac{t-u}{1+u}\right)^{\mathrm{N}} (1+u)^{x-1}\, \mathrm{d}u$$

b) Calculer $\sup_{u\in[0,t]} \left|\dfrac{t-u}{1+u}\right|$; en déduire $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x) = 0$, puis l'égalité :

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Gamma_n(x)$$

2. Que peut-on dire de la série $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \Gamma_n(x)$ lorsque $|t| > 1$?

3. On prend ici $t = 1$. Pour quels x la série converge-t-elle ? Montrer que sa somme est alors égale à 2^x.
[On pourra appliquer II.2.a et s'en servir pour étudier la suite $n \mapsto 2^x - \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k(x)$]

4. On prend ici $t = -1$. Pour quels x la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n(x)$ est-elle absolument convergente ?
Pour quels x est-elle convergente ? Soit $\sigma(x)$ sa somme ; donner la valeur de $\sigma(x)$ lorsque x est un entier naturel.

5. On fixe x positif, et l'on pose, u décrivant $[0,1]$:

$$\varphi_x(u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n \Gamma_n(x)$$

Reconnaître, pour $u \neq 1$, cette fonction. Établir que la série ci-dessus converge normalement en u sur $[0,1]$. En déduire $\sigma(x)$ pour $x \geqslant 0$.

PARTIE V :

On considère dans cette partie des fonctions de la forme :

$$f(x) = \int_{-1}^{0} (1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

où h est une application continue de $[-1,0]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour $x > 0$, on a la relation :

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t\right)\Gamma_n(x) \qquad \textbf{(1)}$$

2. h désigne toujours une fonction définie et continue sur [-1,0], et on suppose $x > -1$. On étudie ici :

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty}\int_{-1}^{0} h(t)\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

où $\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x)$ a été défini en IV.1.a .

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} h(t)\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x)\,\mathrm{d}t$ existe.

b) A l'aide du changement de variable $s = \dfrac{t-u}{1+u}$, établir, pour $|t| < 1$:

$$\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x) \;=\; (\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x)(1+t)^x\int_0^t (s+1)^{-x-1}s^{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}s$$

c) En posant :

$$r_{\mathrm{N}}(t) \;=\; \int_0^t (s+1)^{-x-1}s^{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(t) \;=\; \int_{-1}^{t}(1+s)^x h(s)\,\mathrm{d}s$$

établir, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_{-1}^{0} h(t)\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(t,x)\,\mathrm{d}t \;=\; -(\mathrm{N}+1)\Gamma_{\mathrm{N}+1}(x)\int_{-1}^{0}\mathrm{H}(t)(1+t)^{-x-1}t^{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer que l'application $t \longmapsto \left|\mathrm{H}(t)(1+t)^{-x-1}\right|$ est bornée.
En déduire que la relation **(1)** est vérifiée pour $x > -1$.

3. On prend ici $h(t) \;=\; (1+t)^{\lambda}$, où $\lambda \geqslant 0$.

a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale définissant f a-t-elle un sens ?

b) Calculer $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n .

c) Établir, pour $x > -1$, la relation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$$

d) En utilisant les pôles et les zéros de la différence

$$f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n \Gamma_n(x)$$

déterminer les valeurs de x pour lesquelles la relation **(1)** est valable.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆