DS°8 (le 23/03/2013)

EXERCICE

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les équations différentielles

$$(\mathrm{E}_n) \quad x^2y'' + \left(n - n^2 - x^2\right)y = 0\ ,$$

où x désigne une variable réelle et $y = y(x)$ une fonction deux fois dérivable.
On remarque que (E_0) et (E_1) sont les mêmes équations.

1. On prend $n = 0$ et on étudie l'équation différentielle (E_0).

- **a)** Déterminer les solutions de (E_0) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$.
- **b)** L'équation (E_0) a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

2. On prend $n \geqslant 2$ et on suppose que l'équation différentielle (E_n) a une solution développable en série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$, de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

- **a)** Calculer u_0 et u_1.
- **b)** Pour $k \geqslant 2$, donner une relation entre u_k et u_{k-2}.
- **c)** Calculer les coefficients u_k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- **d)** Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer les coefficients u_{n+2p+1}.
- **e)** Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer les coefficients u_{n+2p} en fonction de u_n.
- **f)** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
- **g)** Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E_n) développables en série entière au voisinage de 0 ?

PROBLÈME

Préliminaires

On considère la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \alpha_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^i \,\mathrm{d}u.$$

1. Établir une relation de récurrence entre α_i et α_{i+2}, pour tout entier naturel i.

2. En déduire que :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \text{ impair}, \\ \dfrac{(i-1)(i-3)\dots 1}{i(i-2)..2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Dans tout le problème I désigne l'intervalle $]-1,1[$.
On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = f(x) \quad (\mathcal{E}_f)$$

où f désigne une une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Partie I

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$; justifier qu'il existe une et une seule solution φ de $(\mathcal{E}_f)$ définie sur I et telle que $\varphi(0) = y_0$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

2. Montrer que toutes les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

3. **a)** Résoudre l'équation différentielle homogène associée ;

$$(1-x^2)y' - xy = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

b) Étant donné un réel y_0, démontrer que l'unique solution φ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ telle que $\varphi(0) = y_0$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + y_0\right).$$

c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$(1-x^2)y' - xy = 1 \quad (\mathcal{E}_1)\ ,$$

déterminer les solutions sur I.

Partie II

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m. On rappelle que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m+1$.
Dans la suite du problème, on assimilera un polynôme P et sa fonction polynôme $x \mapsto \mathrm{P}(x)$.
Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta(\mathrm{P})(x) = (1-x^2)\mathrm{P}'(x) - x\mathrm{P}(x).$$

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$. Démontrer que $\Delta(\mathrm{P})$ est un polynôme dont on exprimera le degré en fonction de celui de P.

2. Démontrer que $\mathrm{P} \mapsto \Delta(\mathrm{P})$ induit une application linéaire de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[\mathrm{X}]$. On note Δ_m cette application linéaire.

3. Démontrer que Δ_m est injective.

4. Déterminer le rang de Δ_m. Que peut-on en déduire pour l'image de Δ_m ?

5. Exprimer la matrice A_m de Δ_m relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_{m+1}[\mathrm{X}]$.

   On cherche dans cette partie pour quelles applications f, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ admet une solution polynomiale, c'est-à-dire une solution de la forme $x \mapsto \mathrm{P}(x)$, où P désigne un polynôme à coefficients réels.

6. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I ; montrer que si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ admet sur I une solution polynomiale $x \mapsto \mathrm{P}(x)$, f est nécessairement une fonction polynomiale que l'on exprimera en fonction de $\Delta(\mathrm{P})$.

7. Soit Q un polynôme à coefficients réels et de degré n non nul. On pose $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} q_k \mathrm{X}^k$.
On note V le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordonnées $q_0, q_1, \dots, q_n$. On a ainsi :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

a) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \mathrm{X}^k$. Soit U le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$.
Démontrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\mathrm{Q})$ si et seulement si on a l'égalité $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{U} = \mathrm{V}$.

b) En déduire que les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :

(i) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_\mathrm{Q})$ admet une solution polynomiale.

(ii) Il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q} = \Delta_{n-1}(\mathrm{P})$,

(iii) Le système linéaire $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{S} = \mathrm{V}$ admet une solution S dans $\mathbb{R}^n$.

c) On suppose dans cette question que $n = 4$.

i) Écrire précisément le système $\mathrm{A}_3\mathrm{S} = \mathrm{V}$.

ii) Montrer que.ce système admet une solution si et seulement si les coefficients du polynôme Q vérifient l'égalité : $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$.

iii) En supposant cette condition satisfaite. résoudre ce système et en déduire l'expression de la solution.polynomiale P de $(\mathcal{E}_\mathrm{Q})$, en fonction de q_0, q_1, q_3 et q_4 (q_2 étant exclu).

iv) Que représente la relation $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$ pour l'image de Δ_3 ?

d) On revient au cas où n est un entier naturel non nul quelconque. On introduit sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ une application λ_n définie par :

$$\forall \mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ \lambda_n(\mathrm{R}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{R}(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

i) Démontrer que λ_n est une forme linéaire non nulle.

ii) Démontrer que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, on a : $\lambda_n(\Delta_n(\mathrm{P})) = 0$.

iii) En déduire que l'image de Δ_n et le noyau de λ_n sont égaux.

iv) Expliciter une équation de l'image de Δ_n (on utilisera la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étudiée dans les préliminaires).

e) Déterminer en fonction de $q_0, \dots. q_n$ une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $(\mathcal{E}_\mathrm{Q})$ admette une solution polynomiale.

f) Retrouver le résultat de la question 7(c)ii.

Partie III

On considère maintenant que f est définie par une série entière de rayon de convergence $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

1. **a)** Montrer que les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1,1[$ sont développables en série entière avec un rayon de convergence au moins égal à 1 (on pourra utiliser le résultat de I.3.(b)).

b) Soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ l'une de ces solutions ;

i) Exprimer, pour $k \geqslant 1$, a_{k+1} en fonction de a_{k-1} et b_k.

ii) En déduire, pour $k \geqslant 1$, une relation vérifiée par $\dfrac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$, $\dfrac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}}$ et $\dfrac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$ (on utilisera la question 1. des préliminaires).

iii) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p} sous forme de sommes dépendant de a_0, des α_{2k} et des b_{2k-1}, avec $1 \leqslant k \leqslant p$.

iv) De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour $k \geqslant 1$, une relation vérifiée par

$$(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}, \ (2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)} \ \text{ et } \ b_{2k}\alpha_{2k}.$$

v) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p+1} sous forme de sommes dépendant des α_{2k} et et des b_{2k}, avec $1 \leqslant k \leqslant p$.

2. Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction définie, pour tout $x \in]-1, 1[$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

b) Montrer que φ est une solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1,1[$.

c) On veut démontrer que $\varphi(x)$ admet $-f(1)$ pour limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

i) Soit $x \in]-1,1[$ et soit $\theta \in]0,\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

ii) Soit F la fonction définie par :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \ F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

Justifier la dérivabilité de F sur $]-\pi,\pi[$ et déterminer sa fonction dérivée F'. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

iii) Conclure.

d) On pose maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

i) Expliciter φ_0 et φ_1.

ii) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k}\varphi_{k-2}(x).$$

iii) Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que φ_{2p+1} est une fonction polynomiale de degré $2p$.

iv) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_{2p} de degré $2p-1$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{2p}(x) = \mathrm{P}_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x).$$

v) Quelles sont les valeurs de k, pour lesquelles les fonctions φ_k admettent une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

e) Montrer que la série de fonctions $\sum_{k>0} b_k\varphi_k$ converge simplement vers φ sur $]-1,1[$.

★ ★ ★ ★
★ ★ ★
★ ★
★