DS n°7 (le 16/02/2013)

Notations.

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} \, \mathrm{d}t$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

Objectifs.

L'objet de ce problème est d'étudier l'existence et un procédé de calcul éventuel de J_m.
La partie I est consacrée à l'étude de la fonction φ pour obtenir un résultat qui concerne J_1.
L'étude de l'existence de J_m fait partie de la partie II.
La partie III voit la mise en oeuvre d'un procédé de calcul des intégrales J_m (lorsqu'elles convergent).

1 Étude de la fonction φ.

On désigne par d (respectivement δ) la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $d(t) = t-1+\cos(t)$ (respectivement $\delta(t) = \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$).

I.1. **Étude des fonctions d et δ.**

I.1.1 Étudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t} \leqslant \alpha$.

I.1.2 Étudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leqslant \beta$.

I.2. **Existence de la fonction φ sur $[0,+\infty[$.**

Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$.

I.3. **Limite de la fonction φ en $+\infty$.**

I.3.1 Préciser le signe de $\varphi(x_1)-\varphi(x_2)$, pour $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

I.3.2 Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser I.1.2).

I.4. **Caractère $\mathscr{C}^k$ de la fonction φ.**

I.4.1 Montrer que la fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$.

I.4.2 Montrer que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (on pourra utiliser I.1.1).

I.4.3 Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.

I.4.4 Montrer que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

I.4.5 Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

I.4.6 Expliciter $\varphi'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

I.5. **Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.**

I.5.1 Déterminer la limite de $x\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.5.2 Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.5.3 Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0,+\infty[$.

I.5.4 Déterminer $\varphi(0)$.

2 Étude de l'existence de J_m.

II.1. **Étude de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$.**

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel non nul m.

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2. **Étude de J_1.**

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).

II.3. **Étude de l'existence de I_k.**

Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k (on pourra utiliser une intégration par parties).

II.4. **Étude de la nature de J_m.**

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ et tout entier relatif k, on note : $\mathrm{I}_k(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

II.4.1 Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide des intégrales $\mathrm{I}_k(x)$.

II.4.2 En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p.

II.4.3 Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour p entier naturel non nul ?

3 Calcul de J_{2p+1}.

III.1. **Un développement de Fourier.**

On désigne par x un nombre réel fixé, non multiple entier de π, par h_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, 2π-périodique et vérifiant : $h_x(t) = \cos\left(\dfrac{x}{\pi}t\right)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$.

III.1.1 Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(h_x)$ et $b_n(h_x)$ de la fonction h_x.

On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$a_n(h_x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_x(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(h_x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_x(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

III.1.2 Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{2x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2}$ et déduire de III.1.1 la valeur de la somme $\displaystyle\frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2}$.

QUESTION SUPPRIMÉE

On admettra pour la suite le résultat suivant :

$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z}\,,\ \frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2} = 1\,.$$

III.2. **Étude d'un procédé de calcul.**

On désigne par f une fonction définie et continue sur $[-1,1]$ à valeur réelles; on suppose de plus que f est impaire et dérivable en 0.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

- $\displaystyle\gamma_n = \int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$,
- u_n l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{2tf(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2}$,
- $\displaystyle\mu_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

III.2.1 Déterminer la limite de γ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

III.2.2 Établir (pour tout entier naturel non nul n) une relation entre γ_n et μ_n.

III.2.3 Établir la convergence, pour tout t appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$.

Désormais on note $\displaystyle S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ pour tout t appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

III.2.4 Montrer que la fonction S est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

III.2.5 justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\gamma_n$ et l'égalité $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n$.

III.2.6 Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

III.2.7 Justifier la convergence des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

III.2.8 Exprimer la différence $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

III.3. **Application au calcul de** J_{2p+1}.

III.3.1 En utilisant les résultats obtenus en III.1 et III.2 retrouver la valeur de J_1 (déjà obtenue en II.2).

III.3.2 Calculer J_3.

III.3.3 Plus généralement, expliciter J_{2p+1} pour tout entier naturel p.

★ ★ ★ ★
★ ★ ★
★ ★
★