CORRIGÉ DM N°6 (E3A 2001)

Partie I

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, elle équivaut à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, qui est positive et intégrable sur $]0,1]$ et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$, qui est positive et intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc elle est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. Le changement de variable $u = \sqrt{kt}$ ($\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même) conduit à

$$\mathrm{J}_k = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

3. Analogue au 1. : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$ est continue sur $]0,+\infty[$; au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t} \sim \dfrac{2e^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

4. **a)** Il suffit de remplacer $\mathrm{ch}\,t$ par sa définition, et de multiplier numérateur et dénominateur par e^{-t}.

b) Sur $]0,+\infty[$, $0 < e^{-2t} < 1$, donc

$$\forall t > 0\,,\ \frac{1}{1+e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-2kt}$$

Donc

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt$$

La série fournie par l'énoncé n'étant pas absolument convergente, il n'y a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème habituel d'intégration terme à terme sur un intervalle non borné (convergence d'une série en norme 1). Il y a alors deux solutions possibles :

- *1ère solution : un calcul direct.*

  On écrit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\mathrm{K} &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt + \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}\left((-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt + \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\end{aligned}$$

  puisque la première somme est finie. Il s'agit donc de montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt = 0$$

  Il s'agit du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial, donc

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{e^{-(2n+3)t}}{\sqrt{t}}$$

  On peut, ou bien utiliser le théorème de convergence dominée en majorant encore par $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, ou bien écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right|dt \leqslant \mathrm{J}_{2n+3} = \sqrt{\frac{\pi}{2n+3}}$$

qui tend bien vers 0 si n tend vers $+\infty$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k J_{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

- *2ème solution : utilisation du théorème de convergence dominée pour les séries.*

  On remarque que, pour $t > 0$ fixé, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}$ vérifie le critère spécial sur les séries alternées. On peut donc majorer ses sommes partielles :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right| \leqslant \frac{e^{-(2n+3)t}}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$$

  avec φ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

  Le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles de la série permet alors de conclure.

5. La série de somme K est une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial. Sa somm est donc comprise entre deux sommes partielles consécutives et on aura en particulier :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} < K < 1$$

ce qui implique l'inégalité de l'énoncé. sk

Partie II

6. a) Calcul à savoir faire ! On écrit

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \mathscr{I}m \left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right) \\
&= \mathscr{I}m \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) \qquad (x \in]0, \pi[\,,\ \text{donc } e^{ix} \neq 1) \\
&= \mathscr{I}m \left(\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{-2i \sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin\frac{x}{2}} \right) \\
&= \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

On remarque qu'il en résulte $|A_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$, puisque $\dfrac{x}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) C'est ce qu'on appelle la *transformation d'Abel*. En remarquant que, si $k \geqslant 2$, $\sin(kx) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$, on écrit

$$f_n(x) = A_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k(x) - A_{k-1}(x)}{\sqrt{k}}$$

On sépare ensuite la somme en deux, et on fait un changement d'indice dans la deuxième somme. On obtient

$$f_n(x) = A_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k(x)}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(x)}{\sqrt{k+1}}$$

On rassemble à nouveau (le terme où figure $A_n(x)$ reste à part) :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) + \frac{A_n(x)}{\sqrt{n}}$$

Or $\left| \dfrac{A_n(x)}{\sqrt{n}} \right| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2} \sqrt{n}}$, qui tend bien vers 0 si n tend vers l'infini.

7. D'après la question précédente, il suffit de montrer que la série $\sum \mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ converge. Or :

$$\left|\mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

et par « télescopage », la série $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ converge.
La série $\sum \mathrm{A}_k(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ est donc *absolument convergente*, ce qui permet de conclure.

8. a) On a $f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt{k}}$.
Si $n\leqslant k\leqslant 2n$, alors $\frac{\pi}{4}\leq k\frac{\pi}{4n}\leqslant\frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. D'autre part, $\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc

$$f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\geqslant n\times\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

b) Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeait uniformément sur $]0,\pi[$, alors $(f_{2n}-f_n)$ convergerait uniformément vers 0. Or, en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $]0,\pi[$,

$$\left|f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right|\leqslant\|f_{2n}-f_n\|_\infty$$

et la question précédente montre que $\lim_{n\to\infty}\left(f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)=+\infty$.
Donc $\lim_{n\to+infty}\|f_{2n}-f_n\|_\infty=+\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0,\pi[$.

On pouvait aussi dire que, d'après la question précédente, la suite (f_n) ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme.

9. a) La fonction $g : t\mapsto|\mathrm{e}^{ix-t}-1|$ est continue sur $[0,+\infty[$. Étant positive, elle a les mêmes variations que son carré. Posons $h(t)=|\mathrm{e}^{ix-t}-1|^2$. On trouve sans peine

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}\cos x+1$$

h est de classe $\mathscr{C}^1$ et $h'(t)=2\mathrm{e}^{-t}(\cos x-\mathrm{e}^{-t})$. Si $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, alors h' est négative sur $[0,+\infty[$. Si $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, h' s'annule et change de signe pour $t=-\ln\cos x$, valeur qui est bien positive. La valeur de h en ce point est

$$h(-\ln\cos x)=\cos^2 x-2\cos^2 x+1=\sin^2 x$$

Finalement, le tableau de variations de g est (en remarquant que $\sin x>0$),

– Cas $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$

t	0	$+\infty$
$g(t)$	$\lvert\mathrm{e}^{ix}-1\rvert$ $\searrow$	1

– Cas $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

t	0	$-\ln\cos x$	$+\infty$
$g(t)$	$\lvert\mathrm{e}^{ix}-1\rvert$ $\searrow$	$\sin x$	$\nearrow$ 1

b) Ce qui précède montre que $|\mathrm{e}^{-ixt}-1|\geqslant 1$ si $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, et que $|\mathrm{e}^{-ixt}-1|\geqslant\sin x>0$ si $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. En tout cas,

$$\forall t\in[0,+\infty[\quad\left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}(1-\mathrm{e}^{-ixt})}\right|\leqslant\frac{\mathrm{Ce}^{-t}}{\sqrt{t}}$$

où $\mathrm{C}=\frac{1}{\sin x}$ ou 1 selon les cas, ne dépend pas de t. L'intégrabilité en résulte sans peine.

c) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car

$$\left|\frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right| \leqslant \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}$$

qui est intégrable d'après le (b).
On reconnaît dans cette expression la somme partielle d'une série géométrique. Plus précisément,

$$\frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{n}(e^{ix-t})^k$$

Donc (la somme est finie)

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\,dt = \int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e^{ix-t})^k}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=1}^{n}e^{ikx}J_k = \sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

dont la partie imaginaire est bien $\sqrt{\pi}f_n(x)$.

d) Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ tend vers $\dfrac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

$$\forall t \in\,]0,+\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right| \leqslant \frac{e^{-t}+e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|} \leqslant \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}$$

qui est continue et, d'après (b), intégrable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et (compte tenu en plus de la continuité de Im),

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathscr{Im}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}dt\right)$$

On peut aussi majorer directement $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}dt\right|$ et vérifier que cette expression tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.
En multipliant haut et bas par le conjugué $\overline{1-e^{ix-t}}$, on obtient

$$\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})} = \frac{e^{ix-t}(1-e^{-ix-t})}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)} = \frac{(e^{ix-t}-e^{-2t})}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)}$$

dont la partie imaginaire est $\dfrac{e^{-t}\sin x}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)} = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)}$. On a bien le résultat annoncé.
Remarque : pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on retrouve le résultat du 4.b.

e) Comme $x \in\,]0,\pi[$, $\sin x > 0$, et $\operatorname{ch} t > 1 \geqslant q\cos x$. La fonction à intégrer est donc continue, positive et non nulle ; il en résulte $f(x) > 0$.

f) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}\operatorname{ch} t}$.
On a $\operatorname{ch} t > \dfrac{e^t}{2}$, d'où $f(x) < \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}J_1 = 1$. Par ailleurs, sur $]0,+\infty[$, $\operatorname{ch} t - e^t = -\operatorname{sh} t < 0$, donc $f(x) > \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}J_1 = \dfrac{1}{2}$.
On retrouve le résultat de la question 5.

Partie III

10. **a)** Analogue à la question 3.

b) On écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos(2x))} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t + 2\sin^2 x - 1)}$. Puis on pose $t = 2u$:

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{\sqrt{2u}(\operatorname{ch}(2u) - 1 + 2\sin^2 x)}$$

Il faut exprimer $\operatorname{ch} 2u - 1$. La formule n'est pas au programme, mais on la retrouve facilement :

$$\operatorname{ch}(2u) - 1 = \frac{\mathrm{e}^{2u} + \mathrm{e}^{-2u} - 2}{2} = \frac{(\mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{-u})^2}{2} = 2\operatorname{sh}^2 u$$

et on obtient bien la formule proposée.

11. $x \mapsto \sin 2x$ est évidemment continue sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, $\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x > 0$, donc la fonction $\varphi : (u, x) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ est continue sur $]0, +\infty[\times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Soit $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors

$$\forall u \in]0, +\infty[\quad \forall x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right[\quad 0 \leq \varphi(u, x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 a)}$$

Cette dernière fonction est clairement intégrable sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination locale est donc vérifiée. Il résulte du théorème de continuité d'une intégrale à paramètres (les autres hypothèses sont faciles à vérifier, mais il fallait les écrire) que $x \mapsto f(2x)$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc que f est continue sur $]0, \pi[$.

12. On procède de même, mais on domine en outre la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)^2}$$

qu'on domine sur $]0, +\infty[\times \left[[a, \dfrac{\pi}{2}[\right[$ par $\dfrac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 a)^2}$, fonction intégrable sur $]0, +\infty[$.

On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur un intervalle non compact, et f apparaît alors comme le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Rem : on pouvait bien sûr répondre directement à la question 12, ce qui impliquait le résultat de la question 11 !

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆