CORRIGÉ DU DS N°8

EXERCICE – extrait de CCP PSI 2002 –

1. a) Sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, (E_0) s'écrit $y''-y=0$ et donc :

$\boxed{\text{La solution générale de } (\mathrm{E}_0) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ ou }]0,+\infty[\text{ est } y = \mathrm{A}\operatorname{ch} x + \mathrm{B}\operatorname{sh} x,\ (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$.

b) Par conséquent, si f est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{A}\operatorname{ch} x + \mathrm{B}\operatorname{sh} x & \text{si } x<0 \\ \mathrm{C}\operatorname{ch} x + \mathrm{D}\operatorname{sh} x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

et la continuité de f en 0 nécessite $\mathrm{A}=\mathrm{C}$, sa dérivabilité en 0 nécessite $\mathrm{B}=\mathrm{D}$. Réciproquement, $f : x \mapsto \mathrm{A}\operatorname{ch} x + \mathrm{B}\operatorname{sh} x$ est solution sur $\mathbb{R}$:

$\boxed{\text{La solution générale de } (\mathrm{E}_0) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } y = \mathrm{A}\operatorname{ch} x + \mathrm{B}\operatorname{sh} x,\ (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$.

2. a) En tant que somme d'une série entière, y est de classe C^∞ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ avec :

$$\forall x\in\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\ ,\ x^2y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)u_k x^k \quad \text{et} \quad x^2y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-2}x^k.$$

d'où les relations traduisant le fait que y est solution de (E_n) :

$$\left(n-n^2\right)u_0 = \left(n-n^2\right)u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k\geqslant 2 \quad \left(k(k-1)+\left(n-n^2\right)\right)u_k - u_{k-2} = 0.$$

Puisqu'ici $n\geqslant 2$, $n-n^2$ est non nul et on en déduit : $\boxed{u_0=u_1=0}$.

b) D'après ce qui précède : $\boxed{\forall k\geqslant 2 \quad (k-n)(k+n-1)u_k = u_{k-2}}$.

c) Pour $k\in [\![2,n-1]\!]$, on a $(k-n)(k+n-1)\neq 0$ et donc

$$u_k = \frac{u_{k-2}}{(k-n)(k+n-1)}.$$

Comme $u_0=u_1=0$ d'après **I.2.1.**, une récurrence immédiate fournit :

$$\boxed{\forall k\in [\![0,n-1]\!] \quad u_k = 0}.$$

d) En particulier, $u_{n-1}=0$; or, en remplaçant k par $n+2p+1$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad u_{n+2p+1} = \frac{u_{n+2p-1}}{(2p+1)(2p+2n)}$$

d'où, toujours par récurrence,

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ u_{n+2p+1}=0.}$$

e) De même, en remplaçant k par $n+2p$, on obtient

$$\forall p\in\mathbb{N}^* \quad u_{n+2p} = \frac{u_{n+2p-2}}{2p(2p+2n-1)}.$$

d'où l'on déduit par récurrence :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ u_{n+2p} = \frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{(p+n)!}{p!\,(2p+2n)!}\cdot u_n}$$

f) Compte tenu des résultats précédents, $y(x)$ est de la forme : $y(x) = x^n \sum_{p=0}^{\infty} u_{n+2p} x^{2p}$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+2p+2}x^{2p+2}}{u_{n+2p}x^{2p}}\right| = \frac{1}{(2p+2)(2p+2n+1)}x^2 p \underset{0}{\to} \infty$$

donc d'après la règle de d'Alembert ; la série $\sum_{p=0}^{\infty} u_{n+2p}x^{2p}$ est absolument convergente pour tout x réel. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{R} = +\infty.}$$

g) D'après les deux questions précédentes, l'ensemble des solutions développables en série entière de (E_n) est une droite vectorielle, ces solutions étant toutes de la forme $y(x) = u_n x^n \sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{(p+n)!}{p!\,(2p+2n)!}\right]x^{2p}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec u_n constante arbitraire dans $\mathbb{R}$.

PROBLÈME – E3A PC 2004 –

Préliminaires

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, on a, avec une intégration par parties :

$$\alpha_{i+2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 u)(\sin u)^i \,\mathrm{d}u = \alpha_i - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos u}_{=f}\,\underbrace{\cos u(\sin u)^i}_{=g'}\,\mathrm{d}u$$

$$= \alpha_i - \frac{1}{(i+1)\pi}\left[\cos u \sin^{i+1} u\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{i+1}\alpha_{i+2}.$$

Et finalement : $\boxed{\alpha_{i+2} = \frac{i+1}{i+2}\alpha_i}$.

2. On remarque que $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = 1$ et $\alpha_1 = 0$.

De là, pour i impair, on a clairement $\alpha_i = 0$.

Enfin, on a successivement : $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$, $\alpha_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$ ... et donc, pour i entier naturel pair $\geqslant 2$, on a : $\boxed{\alpha_i = \frac{(i-1)(i-3.)\ldots 1}{i(i-2)..2}}$.

Partie I

1. Le théorème utilisé est le suivant (Cauchy-Lipschitz) :

> Soient a, b, c trois fonctions continues sur I, et telles que a ne s'annule pas sur I. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ a une unique solution sur I vérifiant $y(x_0) = y_0$.

On applique ici ce théorème avec $a(x) = 1 - x^2$ (continue et non nulle sur $]-1,1[= \mathrm{I}$, $b(x) = -x$ et $c(x) = f(x)$ (toutes deux continues sur I) et $x_0 = 0$.
On a alors bien le résultat voulu.

2. Soit φ une solution de $(\mathcal{E}_f)$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, HR_n : « φ est n fois dérivable sur I ».
- HR_1 est vraie par définition même d'une solution.
- Soit $n \geqslant 1$ tel que HR_n soit vraie. On a alors, pour $x \in \mathrm{I}$: $\varphi^{\uparrow}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}(x\varphi(x) + f(x))$, et $x \to \dfrac{1}{1-x^2}(x\varphi(x)+f(x))$ est d'après HR_n n fois dérivable sur I. Donc HR_{n+1} est bien vraie.

On a donc montré par récurrence que φ est dérivable à tout ordre, en d'autres termes que $\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur I}}$.

3. a) $(\mathcal{E}_0)$ s'écrit : $y' = \dfrac{x}{1-x^2}y$. On sait d'après le cours que sa solution générale s'écrit : $y = \lambda \exp\left(\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)$ avec λ décrivant $\mathbb{R}$.

Ainsi, la solution générale de $(\mathcal{E}_0)$ est : $\boxed{y = \lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}}$.

b) On peut faire la recherche d'une solution particulière par la variation de la constante, mais cela n'est pas utile puisqu'une solution particulière nous est suggérée : on pose $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Comme f est continue, φ est dérivable sur I et on a :

$$\varphi_0'(x) = \frac{f(x)}{1-x^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$(1-x^2)\varphi_0'(x) - x\varphi_0(x) = f(x).$$

Ce qui montre bien que φ_0 est solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur I.

Par suite la solution générale de $(\mathcal{E}_f)$ sur I est $y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. La solution φ vérifiant $\varphi(0) = y_0$ est alors obtenue pour $\lambda = y_0$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right)}.$$

c) On reprend la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_f)$ avec $f(t) = 1$:

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Donc la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$ est :

$$\boxed{y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Partie II

1. Puisque $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est une algèbre et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on en déduit que pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on a $\Delta(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Soit n le degré du polynôme $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. Alors, si $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(\mathrm{P}') = n-1$ et donc $(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{P}'$ est de degré $n+1$, tout comme XP. Donc $\Delta(\mathrm{P})$ est de degré au plus $n+1$.

Le coefficient du terme de degré $n+1$ est $-na_n - a_n \neq 0$. Donc, dans ce cas, on a $d^o(\Delta(P)) = n+1$. Si $n = 0$, c'est-à-dire si P est une constante non nulle k, alors $\Delta(P) = -kX$ et le résultat reste vrai.
Enfin $\Delta(0) = 0$, donc avec la convention habituelle « $-\infty + 1 = -\infty$ » on peut dire que dans tous les cas : $\boxed{d^o(\Delta(P)) = 1 + d^o(P)}$.

2. Soit Δ_m la restriction de Δ à $\mathbb{R}_m[X]$. Alors pour $P \in \mathbb{R}_m[X]$, on a $d^o(P) \leqslant m$, et donc $d^o(\Delta(P)) = 1 + d^o(P) \leqslant m+1$, donc Δ_m est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$. La linéarité est immédiate. Ainsi $\boxed{\Delta_m \text{ est bien une application linéaire de } \mathbb{R}_m[X] \text{ dans } \mathbb{R}_{m+1}[X]}$.

3. Il résulte de la question 1 sur les degrés que si $P \neq 0$, alors $\Delta(P) \neq 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\Delta_m) = \{0\}$ et $\boxed{\Delta_m \text{ est injective}}$.

4. Par application du théorème du rang, on a : $\mathrm{rg}(\Delta_m) = \dim(\mathbb{R}_m[X]) = m+1$.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_{m+1}) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}_{m+1}[X]}$.

5. Pour k entier entre 0 et m, on calcule $\Delta_m(X^k)$:

$$\Delta_m(X^k) = (1 - X^2)kX^{k-1} - X^{k+1} = -(k+1)X^{k+1} + kX^{k-1} \text{ si } k \neq 0, \quad \text{ et } \Delta_m(1) = -X.$$

Donc la matrice A_m, qui est de type $(m+2, m+1)$ s'écrit :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & -m+1 & 0 & m \\ & \text{\Large 0} & & & 0 & m & 0 \\ & & & & & 0 & -m-1 \end{pmatrix}$$

6. Si P est une solution polynomiale de $(\mathcal{E}_f)$, on a alors $\Delta(P) = f$, et on a vu que pour un pour tout polynôme P, $\Delta(P)$ est aussi un polynôme. Donc : $\boxed{f \text{ est le polynôme } \Delta(P)}$.

7. a) Dire que le polynôme P est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_Q)$ revient à dire :

$$\Delta_{n-1}(P) = Q,$$

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{A_{n-1}U = V}$.

b) On le montre par implications circulaires :

– $(i) \Rightarrow (ii)$: Si $(\mathcal{E}_Q)$ admet une solution polynomiale P, alors $\Delta(P) = Q$ et donc, d'après II.1 $d^o(Q) = d^o(P) + 1$, et donc $d^o(P) = n-1$. Donc $\Delta_{n-1}(P) = Q$, et (ii) est établi.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: immédiat avec le II.7.a.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Si S est solution de $A_{n-1}S = V$ avec S de coordonnées $s_0, \dots, s_{n-1}$, alors (d'après le II.7.a) le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s_k X^k$ est solution de $(\mathcal{E}_Q)$, ce qui prouve (i).

Donc $\boxed{\text{l'équivalence des trois propositions est démontrée}}$.

c) i) $A_3S = V$ s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$, ce qui s'écrit aussi :

$\begin{cases} s_1 = q_0 \\ -s_0 + 2s_2 = q_1 \\ -2s_1 + 3s_3 = q_2 \\ -3s_2 = q_3 \\ -4s_3 = q_4 \end{cases}$. Une résolution par substitution conduit au système équivalent suivant :

$$\begin{cases} s_1 = q_0 \\ s_2 = -\dfrac{1}{3}q_3 \\ s_0 = -\dfrac{2}{3}q_3 - q_1 \\ s_3 = \dfrac{1}{3}q_2 + \dfrac{2}{3}q_0 \\ \dfrac{-4}{3}q_2 - \dfrac{8}{3}q_0 = q_4 \end{cases}$$

Ainsi ce système admet une solution s, et seulement si $\boxed{3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0}$, et dans ce cas, cette solution est unique et est : $(s_0, \dots, s_3) = \left(-\dfrac{2}{3}q_3 - q_1, q_0, -\dfrac{1}{3}q_3, \dfrac{1}{3}q_2 + \dfrac{2}{3}q_0\right)$.

ii) On a donc, lorsque $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$, l'unique solution P de $(\mathcal{E}_Q)$ qui est :

$$P = \left(-\frac{2}{3}q_3 - q_1\right) + q_0 X - \frac{1}{3}q_3 X^2 + \left(\frac{1}{3}q_2 + \frac{2}{3}q_0\right)X^3$$

ou encore, compte tenu de $q_2 = -\dfrac{3}{4}q_4 - 2q_0$:

$$\boxed{P = \left(-\frac{2}{3}q_3 - q_1\right) + q_0 X - \frac{1}{3}q_3 X^2 - \frac{1}{4}q_4 X^3.}$$

iii) $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$ est une CNS pour que $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ ait un antécédent par Δ_3. En d'autres termes, $\boxed{3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0 \text{ est une équation de l'hyperplan } \mathrm{Im}(\Delta_3)}$.

d) i) L'existence de l'intégrale et la linéarité de λ_n sont immédiates.

De plus, en prenant pour R le polynôme 1 (constant), on a : $\lambda_n(1) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \pi$, donc

$\boxed{\lambda_n \text{ est une forme linéaire non nulle}}$.

ii) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\lambda_n(\Delta_n(P)) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1-\sin^2 u)P'(\sin u) - \sin u.P(\sin u)]\,du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 u.P'(\sin u) - \sin u.P(\sin u)]\,du$$

Or, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin u.P(\sin u)\,du = [-\cos u.P(\sin u)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u.P^{\uparrow}(\sin u)du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u.P'(\sin u)\,du.$$

Finalement, on obtient bien : $\boxed{\lambda_n(\Delta_n(P)) = 0}$.

iii) Ceci montre donc que $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathrm{Ker}(\lambda_n)$. Or il a été établi que $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, et c'est aussi le cas du noyau de la forme linéaire non nulle λ_n. Ces deux sous-espaces vectoriels sont donc de même dimension (finie), et donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathrm{Ker}(\lambda_n)}$.

iv) On va en fait chercher à déterminer $\mathrm{Ker}(\lambda_n)$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$. Alors :

$$\lambda_n(P) = \sum_{k=0}^{n} p_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^k\,du = \sum_{k=0}^{n} \pi p_k \alpha_k = \pi\left(p_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{n} p_k \frac{(k-1)(k-3.)\dots 1}{k(k-2)..2}\right).$$

Puisque $P \in \mathrm{Im}(\Delta_n) \Longleftrightarrow \lambda_n(P) = 0$, $\boxed{\text{une équation de } \mathrm{Im}(\Delta_n) \text{ est donc : } \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k = 0}$ (ou encore $p_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{(k-1)(k-3.)\dots 1}{k(k-2)..2} p_k = 0$).

e) D'après l'équivalence entre les propriétés (i) et (ii) du II.7.b, on peut dire qu'une CNS pour que $(\mathcal{E}_Q)$ admette une solution polynomiale est que $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_n)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{q_0 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{(k-1)(k-3.)\dots 1}{k(k-2)..2} q_k = 0.}$$

f) Pour $n = 4$, cette condition s'écrit donc :
$q_0 + \frac{1}{2} q_2 + \frac{3}{8} q_4 = 0$, ou encore : $8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0$: on retrouve bien l'expression du 7.c.ii.

Partie III

1. a) Soit φ une solution de $(\mathcal{E}_f)$, et soit $y_0 = \varphi(0)$. On a alors :

$$\forall x \in I\ ,\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(y_0 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \right).$$

Par hypothèse, f est développable en série entière (DSE en abrégé pour la suite) de rayon de convergence > 1. Or, $t \mapsto (1+t)^{\frac{1}{2}}$ est, d'après le cours DSE de rayon 1. Donc, en substituant $-t^2$ à t, on en déduit que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est DES de rayon $\sqrt{1} = 1$, et donc par utilisation de la série produit de Cauchy des deux séries entières, $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est DSE de rayon $\geqslant 1$. Enfin, par primitivation de série entière, $x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$ est DES de rayon $\geqslant 1$. Puis on applique à nouveau le théorème sur la série produit, et finalement $\boxed{\varphi \text{ est DES de rayon } \geqslant 1}$.

b) i) On a alors, pour tout $x \in I$: $(1-x^2) \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$. Donc, en développant et en réindiciant, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{\substack{\cancel{k=2} \\ k=1}}^{+\infty} (k-1) a_{k-1} x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

On met tout sous une même somme :

$$a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big((k+1) a_{k+1} - k a_{k-1} \Big) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

ce qui, d'après l'unicité du DES équivaut à :

$$\begin{cases} a_1 = b_0 \\ \forall k \geqslant 1,\ (k+1) a_{k+1} - k a_{k-1} = b_k \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, a_{k+1} = \frac{k}{k+1} a_{k-1} + \frac{1}{k+1} b_k.}$$

ii) On rappelle d'abord que, pour $i \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha_{i+2} = \dfrac{i+1}{i+2}\alpha_i$ et que $\alpha_i \neq 0$ pour i pair.

Donc, pour $k \geqslant 1$: $a_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k}a_{2(k-1)} + \dfrac{1}{2k}b_{2k-1}$ et $\alpha_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k}\alpha_{2(k-1)}$; donc :

$$\boxed{\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}} = \frac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{1}{2k-1}\cdot\frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2(k-1)}}.}$$

iii) Il s'ensuit que pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{a_{2p}}{\alpha_{2p}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{a_0}{\alpha_0}$, ou encore :

$$\boxed{a_{2p} = \alpha_{2p}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{a_0}{\alpha_0}\right).}$$

iv) On a, pour $k \geqslant 1$: $(2k+1)a_{2k+1} = 2ka_{2k-1} + b_{2k}$, puis on multiplie par $\alpha_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k}\alpha_{2(k-1)}$:

$$\boxed{(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k} = (2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)} + b_{2k}\alpha_{2k}}$$

v) Ainsi, si on pose $u_k = (2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$, on a alors $u_k = u_{k-1} + b_{2k}\alpha_{2k}$, et par suite $u_p = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k}$, soit : $(2p+1)a_{2p+1}\alpha_{2p} = a_1\alpha_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k}$, et finalement (sachant que $a_1 = b_0$) :

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\alpha_{2p}}\left(b_0\alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k}\right) = \frac{1}{(2p+1)\alpha_{2p}}\sum_{k=0}^{p} b_{2k}\alpha_{2k}.}$$

2. a) Le seul problème réside dans l'existence de l'intégrale.

Pour $x \in]-1,1[$, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[x,1[$ [et f est continue en 1 (car DSE de rayon $R > 1$). Donc $f(t) \underset{t\to1}{=} O(1)$, et $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \underset{t\to1}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$(écrire $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} \underset{t\to1}{\sim} \sqrt{2(1-t)}$) ; or $t \to \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[x,1[$ pour $x < 1$, et donc $\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur }]-1,1[}$.

b) Posons $y_0 = \varphi(0) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$; ainsi $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + y_0\right)$, et donc d'après I.3.a : $\boxed{\varphi \text{ est la solution de } (\mathcal{E}) \text{ qui vérifie } \varphi(0) = y_0}$.

c) i) On a, puisque $\theta \in]0,\pi[$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\left(\int_1^{\cos\theta}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + y_0\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\int_1^{\cos\theta}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + y_0\right).$$

Puis on fait le changement de variable $t = \cos u$, qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,\theta]$ sur $[\cos\theta, 1[$:

$\displaystyle\int_1^{\cos\theta}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\theta}\frac{f(\cos u)}{\sqrt{\sin^2 u}}(-\sin u)\,du$. Or, sur l'intervalle considéré, on a $\sin u > 0$ donc on obtient :

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{-1}{\sin\theta}\int_0^{\theta} f(\cos u)\,du.}$$

ii) La fonction $u \mapsto \cos u$ est continue sur $]-\pi,\pi[$ et à valeurs dans $]-1,1[$, et f est continue sur $]-1,1[$ (car DSE de rayon $R > 1$). Donc $u \mapsto f(\cos u)$ est continue sur] $]-\pi,\pi[$, et donc :

$\boxed{F \text{ est dérivable sur }]-\pi,\pi[\text{ et pour } \theta \in]-\pi,\pi[\text{ , on a } F'(\theta) = f(\cos\theta).}$

Le théorème utilisé est le suivant :

Si g est une fonction continue sur un intervalle I d'intérieur non vide, et si $a \in \mathrm{I}$, alors $\mathrm{G} : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de g sur I.

iii) Par suite, $-\dfrac{\mathrm{F}(\theta)}{\sin\theta} = -\dfrac{\mathrm{F}(\theta)-\mathrm{F}(0)}{\sin\theta} \underset{\theta\to0^+}{\sim} -\dfrac{\mathrm{F}(\theta)-\mathrm{F}(0)}{\theta} \underset{\theta\to0^+}{\to} -\mathrm{F}'(0) = -f(1)$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to1}\varphi(x) = -f(1).}$$

d) i) On calcule :

$\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\mathrm{Arcsin}\,t]_1^x = \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-\mathrm{Arccos}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\varphi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\displaystyle\int_1^x \dfrac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{1-t^2}\right]_1^x = 1$.

ii) Soit $k \geqslant 2$ et $x \in \mathrm{I}$. Pour $0 < \varepsilon \leqslant 2$:

$\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^x \dfrac{t^k\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \left[-t^{k-1}\sqrt{1-t^2}\right]_{1-\varepsilon}^x + (k-1)\int_{1-\varepsilon}^x t^{k-2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, puis, en faisant tendre ε vers 0 :

$\varphi_k(x) = -x^{k-1} + \dfrac{k-1}{\sqrt{1-x^2}}\displaystyle\int_1^x t^{k-2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -x^{k-1} + \dfrac{k-1}{\sqrt{1-x^2}}\int_1^x \dfrac{t^{k-2}(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Donc : $\varphi_k(x) = -x^{k-1} + (k-1)(\varphi_{k-2}(x) - \varphi_k(x))$, et finalement :

$$\boxed{\varphi_k(x) = \dfrac{-x^{k-1}}{k} + \dfrac{k-1}{k}\varphi_{k-2}(x).}$$

iii) Sachant $\varphi_1(x) = 1$ et la formule de récurrence ci-dessus, il est immédiat (avec une récurrence) que pour $p \in \mathbb{N}$: $\boxed{\varphi_{2p+1} \text{ est une fonction polynomiale de degré } 2p}$.

iv) Soit HR_p la propriété à montrer :

« $\exists \mathrm{P}_{2p} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tq $\mathrm{d}^\circ(\mathrm{P}_{2p}) = 2p-1$ et $\forall x \in \mathrm{I}$, $\varphi_{2p}(x) = \mathrm{P}_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x)$ »

- Pour HR_0, il faut bien sûr adopter la convention que un polynôme de degré négatif est le polynôme nul. Il s'agit alors d'établir que $\varphi_0 = \alpha_0\varphi_0$, ce qui est vrai car $\alpha_0 = 1$. Donc HR_0 est vraie avec $\mathrm{P}_0 = 0$.
- Soit $p \geqslant 0$ tel que HR_p soit vraie. Alors (pour $x \in \mathrm{I}$), on a :

$$\varphi_{2p+2}(x) = \frac{-x^{2p+1}}{2p+2} + \frac{2p+1}{2p+2}(\mathrm{P}_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x)).$$

On pose alors $\mathrm{P}_{2p+2} = -\dfrac{\mathrm{X}^{2p+1}}{2p+2} + \dfrac{2p+1}{2p+2}\mathrm{P}_{2p}$: P_{2p+2} est bien un polynôme de degré $2p+1$ (car P_{2p} est de degré $2p-1 < 2p+1$), de sorte que :

$$\varphi_{2p+2}(x) = \mathrm{P}_{2p+2}(x) + \frac{2p+1}{2p+2}\alpha_{2p}\varphi_0(x) = \mathrm{P}_{2p+2}(x) + \alpha_{2p+2}\varphi_0(x)$$

Ce qui prouve HR_{p+1} et achève la récurrence.

v) D'après 2.d.iii, si k est impair alors φ_k est polynomiale et a donc par continuité une limite finie en-l.

Si k est pair, le résultat de la question précédente assure que φ_k a une limite finie en 1 si et seulement si c'est le cas de φ_0. Or $\varphi_0(x) = \dfrac{-\mathrm{Arccos}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\mathrm{Arccos}\,x \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$ et donc φ_0 tend vers $-l$ en 1.

Finalement, $\boxed{\varphi_k \text{ a une limite finie en 1 pour tout } k \in \mathbb{N}}$.

Rem : On pouvait aussi remarquer que φ_k n'est autre que φ lorsqu'on prend $f(x) = x^k$; puisque une telle fonction f est bien somme d'une série entière de rayon > 1 ($\mathrm{R} = \infty$), la question 2.c.iii assure alors directement le résultat.

e) Soit $x \in]-1,1[$. On considère les sommes partielles : $\sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x)$:

Posons, pour $t \in [x,1[$: $g_k(t) = \dfrac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}$.

Les g_k sont continues et intégrables sur $[x,1[$, et $\sum g_k$ converge simplement sur $[x,1[$ vers g définie par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (car $\sum b_k t^k$ est une série entière de rayon > 1, de somme f).

Enfin, $\displaystyle\int_x^1 \left|\frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \mathrm{d}t \leqslant |b_k| \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi |b_k|$, et de la convergence absolue en $t = 1$ de $\sum b_k t^k$, on déduit que $\sum \pi |b_k|$ converge, et donc $\sum \int_{[x,1[} |g_k|$ converge.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme (convergence en norme 1), on en déduit que $\sum \int_x^1 g_k$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_x^1 g_k = \int_x^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$, et par suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$; en conclusion :

$$\boxed{\sum b_k \varphi_k \text{ converge simplement vers } \varphi \text{ sur }]-1,1[.}$$

★ ★ ★ ★
★ ★ ★
★ ★
★