CORRIGÉ DM N°8 : EIVP 1992

Partie I :

1. a) • Si (x_n) est bornée, il existe un réel $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|x_k| \leqslant \mathrm{M}$.

On a alors : $|y_n| = \dfrac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k| \leqslant \mathrm{M}\dfrac{n+1}{n+1} = \mathrm{M}$.

ce qui prouve que $\boxed{(y_n) \text{ est bornée}}$.

• La réciproque est fausse comme le prouve le contre-exemple suivant :

Soit (x_n) définie par $x_n = (-1)^n n$. On a alors :

— Si n est pair ($n = 2p$) : $\sum_{k=0}^{n} x_k = (-1+2)+(-3+4)+\ldots+((-2p+1)+2p) = p = \dfrac{n}{2}$, d'où $y_n = \dfrac{n}{2(n+1)}$.

— et si n est impair ($n = 2p+1$), on a $\sum_{k=0}^{n} x_k = p-(2p+1) = -p-1$, d'où $y_n = \dfrac{-(n+1)}{2(n+1)} = \dfrac{-1}{2}$.

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n| = \dfrac{1}{2}$, donc (y_n) est bornée, alors que (x_n) ne l'est pas.

b) • Si (x_n) tend vers l, alors (y_n) tend vers l : il s'agit du célèbre théorème de Césaro, vu en cours, et dont je ne reproduis pas ici la démonstration.

• La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n$: on a alors $\lim y_n = 0$, alors que (x_n) diverge.

Rem : Un exercice intéressant consiste à démontrer que, si $\lim y_n = l$ *ET si* (x_n) *est monotone, alors on a* $\lim x_n = l$...

2. a) Si m était strictement positif, on aurait, par définition de la limite, $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{(u_n)^\alpha} > 0$ à partir d'un certain rang N, donc (u_n) serait strictement croissante à partir du rang N d'où $u_n \geqslant u_\mathrm{N} > 0$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $u_n \to 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } m < 0}$$

b) On a : $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n^\alpha} \to m$, soit $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n^\alpha} = m + \mathrm{o}(1)$ et $u_{n+1} - u_n = m u_n^\alpha + \mathrm{o}(u_n^\alpha)$, d'où l'on tire : $u_{n+1}^{-\beta} = \left(u_n + m u_n^\alpha + \mathrm{o}(u_n^\alpha)\right)^{-\beta} = u_n^{-\beta}\left(1 + m u_n^{\alpha-1} + \mathrm{o}(u_n^{\alpha-1})\right)^{-\beta}$.

Or, $u_n^{\alpha-1}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$ (car $\alpha > 1$), et l'on sait que $(1+x)^{-\beta} = 1 - \beta x + \mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0, d'où $u_{n+1}^{-\beta} - u_n^{-\beta} = -m\beta u_n^{\alpha-1-\beta} + \mathrm{o}(u_n^{\alpha-1-\beta})$.

Ainsi, $u_{n+1}^{-\beta} - u_n^{-\beta}$ a une limite finie non nulle pour : $\boxed{\beta = \alpha - 1}$.

c) • On a donc, pour $\beta = \alpha - 1$, en posant $v_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -m(\alpha-1)$.

D'après, 1.a, on a donc aussi $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = -m(\alpha-1)$. Or :

$$w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}^{-\beta} - u_k^{-\beta}\right) = \frac{1}{n+1}\left(u_{n+1}^{-\beta} - u_0^{-\beta}\right)$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^{-\beta}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_{n-1} = -m(\alpha-1)$, soit $u_n^{-\beta} \underset{n\to\infty}{\sim} -mn(\alpha-1)$ et, finalement :

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (mn(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

• D'après les règles de comparaison sur les séries à termes réels positifs, $\sum u_n$ converge ssi $\sum n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ converge, soit (séries de Riemann) $\dfrac{1}{1-\alpha} < -1$ c'est-à-dire : $\underline{\alpha < 2}$ (avec toujours $\alpha > 1$).

3. a) On considère ici la suite u définie par : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Il est clair que (u_n) est décroissante.

- si $u_0 < 0$, alors (u_n) ne peut être minorée, car sinon elle convergerait vers un réel l tel que $l = f(l)$, soit $l = 0$, ce qui est impossible car $u_n \leqslant u_0 < 0$ pour tout n. Ainsi, (u_n) est décroissante non minorée, d'où : $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.
- si $u_0 > 1$, alors $u_1 < 0$, et on est ramené au cas précédent.
- Enfin, si $u_0 \in [0,1]$, puisque $f([0,1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0,1]$, on a $u_n \in [0,1]$ pour tout n. (u_n) étant décroissante minorée, converge ; sa limite l vérifie $l = f(l)$, d'où $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E} = [0,1]}$$

- — Si $u_0 \notin [0,1]$, u_n ne tend pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge.

  — Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$, on a $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$, donc $\sum u_n$ converge.

  — Si $u_0 \in]0,1[$: (u_n) est à termes strictement positifs et converge vers 0 ; on a : $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n^2} = -1$; on peut donc appliquer ce qui précède avec $\alpha = 2$, et on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{F} = \{0,1\}}$$

b) Ici , $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{|x|}}$.

- Si $u_0 \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout n (récurrence facile), d'où $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+\sqrt{u_n}} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0, donc converge vers un réel l tel que f(l)=l, soit $l = 0$.
- Si $u_0 \leqslant 0$, on trouve de la même façon que (u_n) est croissante majorée, et qu'elle converge vers 0.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E} = \mathbb{R}}$$

- — Si $u_0 = 0$, on a $u_n = 0$ pour tout n, donc $\sum u_n$ converge.

  — Si $u_0 > 0$, alors (u_n) est à termes strictement positifs et converge vers 0, et on peut appliquer les résultats précédents. On a, puisque $u_n \to 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+\sqrt{u_n}} - u_n = u_n(1 - \sqrt{u_n} + \mathrm{o}(\sqrt{u_n})) - u_n$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{(u_n)^{\frac{3}{2}}} = -1$. D'après les résultats de la question 2) (ici, $\alpha = \dfrac{3}{2}$), la série $\sum u_n$ converge.

  — Si $u_0 < 0$, on applique les résultats précédents à la suite $(-u_n)$, et on aboutit au même résultat.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{F} = \mathbb{R}}$$

Partie II :

1. Si $\mathrm{F} \neq \emptyset$, il existe u_0 tel que la série $\sum u_n$ converge, ce qui implique $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} u_n$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ (f est continue en 0), on a : $f(0) = 0$.

2. **a)** f étant dérivable en 0, et puisque l'on a $f(0) = 0$, on a : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in]-\eta, \eta[\text{ , } \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon \text{ d'où } |f(x)| < (\varepsilon + |f'(0)|)|x|$$

En choisissant ε tel que $\mathrm{M} = \varepsilon + |f'(0)| < 1$ (ce qui est possible), on aura :

$$\forall x \in]-\eta, \eta[, \ |f(x)| \leqslant \mathrm{M}|x|$$

Cela prouve que l'intervalle $]-\eta, \eta[$ est stable par f. De plus, si $u_0 \in]-\eta, \eta[$, on aura $u_n \in]-\eta, \eta[$ pour tout n et $|u_{n+1}| \leqslant \mathrm{M}|u_n|$, d'où, par récurrence, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}^n |u_0|$. D'après les règles de comparaison sur les séries à termes positifs, puisque $\sum \mathrm{M}^n$ converge ($\mathrm{M} < 1$), la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

$$\boxed{\text{Conclusion : }]-\eta, \eta[\subset \mathrm{F}}$$

b) On a ici $f(x) = \dfrac{x + x^3}{3}$. On trouve facilement : $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

-

— Si $u_0 > \sqrt{2}$: on vérifie facilement que l'intervalle $]\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par f, et que, pour tout $x \in]\sqrt{2}, +\infty[$, $f(x) > x$. La suite (u_n) est donc croissante; si elle était majorée, elle convergerait vers une limite l telle que $f(l) = l$ et $l \geqslant u_0 > \sqrt{2}$, ce qui est impossible. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

— Si $u_0 < -\sqrt{2}$: on montre de la même façon que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ (ou on se ramène au cas précédent en changeant u_0 en $-u_0$, puisque f est impaire).

— Si $u_0 \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$, la suite (u_n) est constante, donc converge !

— Si $u_0 \in]0, \sqrt{2}[$, on vérifie facilement que l'intervalle $]0, \sqrt{2}[$ est stable par f, et que, pour tout $x \in]0, \sqrt{2}[$, $f(x) < x$. La suite (u_n) est donc décroissante; étant minorée par 0, elle converge vers un réel l tel que $l \in [0, u_0]$ et $f(l) = l$, soit : $l = 0$.

— Enfin, on obtient le même résultat pour $u_0 \in]-\sqrt{2}, 0[$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}$$

• Pour que $\sum u_n$ converge, il faut déjà avoir $u_n \to 0$, soit $u_0 \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
Dans ce cas : on a ici $f'(0) = \dfrac{1}{3}$, d'où $|f'(0)| < 1$. η étant défini comme dans la question précédente, on a, puisque $\lim u_n = 0$: $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \in]-\eta, \eta[$.
Puisque $]-\eta, \eta[\subset \mathrm{F}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} u_n$ converge, et, par conséquent, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ aussi.

Rem : On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert, en remarquant que, si $u_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1+u_n^2}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$...

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{F} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[}$$

c) • Remarquons d'abord que, s'il existe N tel que $u_\mathrm{N} = 1$, alors la suite est stationnaire et vaut 0 pour $n \geqslant \mathrm{N}+1$, donc converge, ainsi que la série $\sum u_n$.

• Si $u_0 = \dfrac{1}{2}$, alors la suite (u_n) est constante égale à $\dfrac{1}{2}$; elle converge donc, et $\sum u_n$ diverge.

• f étant injective (c'est une fonction homographique), si $u_0 \neq \dfrac{1}{2}$, on aura $u_n \neq \dfrac{1}{2}$ pour tout n. On peut alors poser : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - \frac{1}{2}}$, et on a, en supposant $u_n \neq 1$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} = \frac{u_n}{2u_n - 1} = \frac{1}{2} v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, soit $v_n = \dfrac{1}{2^n} v_0$, d'où l'on tire, puisque $u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_n}{v_n - 1}$, $u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0}{v_0 - 2^n}$, avec $v_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - \frac{1}{2}}$.
Finalement, deux cas se présentent :

— S'il existe N tel que $u_\mathrm{N} = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{v_0}{v_0 - 2^\mathrm{N}} = 2$ soit $v_0 = 2^{\mathrm{N}+1}$ soit $u_0 = \dfrac{2^\mathrm{N}}{2^{\mathrm{N}+1} - 1}$, alors la suite (u_n) converge, ainsi que la série $\sum u_n$ (cf. remarque précédente).

— Sinon, on a $u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_0}{v_0 - 2^n}$ pour tout entier n, avec $v_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - \frac{1}{2}}$, donc :
  — si $v_0 = 0$, soit $u_0 = 0$, la suite (u_n) est constante égale à 0.
  — sinon, $u_n \sim \dfrac{-v_0}{2^{n+1}}$; on a donc $\lim u_n = 0$, et $\sum u_n$ convergente (comparaison à une série géométrique).

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E} = \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{F} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

Remarque : on pouvait aussi démontrer que, sauf dans le cas $u_0 = \dfrac{1}{2}$, (u_n) tend vers 0, puis conclure comme dans l'exemple précédent en remarquant que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$; c'est peut-être plus rapide, mais j'ai tenu à vous rappeler ci-dessus comment on étudie, en général, une suite homographique ...

3. a) • S'il existe p tel que $u_p = 0$, alors, puisque $f(0) = 0$, on a $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant p$, et la série $\sum u_n$ converge.
• Réciproquement, supposons que la série $\sum u_n$ converge.
On a, exactement comme dans 2.a : $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $|f(x)| \geqslant m|x|$, avec $m > 1$.
On a supposé que $\sum u_n$ converge ; donc $u_n \to 0$ et, par définition de la limite, on a :

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geqslant \mathrm{N},\ u_n \in]-\eta, \eta[$$

On aura donc : $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_{n+1}| \geqslant m|u_n|$ puis, par récurrence, $|u_n| \geqslant m^{n-\mathrm{N}}|u_\mathrm{N}|$. On a donc nécessairement $\underline{u_\mathrm{N} = 0}$ (sinon, puisque $m > 1$, on aurait $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$!).

b) $u_0 \in \mathrm{F} \iff \sum u_n$ converge $\iff \exists p \in \mathbb{N}$ tq $u_p = 0$.
Pour $p \geqslant 1$, $u_p = 0 \iff f(u_{p-1}) = 0 \iff u_{p-1} = 0$, puisque f est injective.
On en déduit facilement par récurrence que, s'il existe p tel que $u_p = 0$, alors $u_0 = 0$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{F} = \{0\}}$$

c) *Solution rapide, car le principe a été détaillé dans la question 2.b2* :
On considère cette fois-ci la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ (pour $u_0 \neq 1$) (car les points fixes de f sont 0 et 1).
On a alors, si $u_n \neq -1$, $v_{n+1} = 2v_n$, puis $u_n = \dfrac{2^n v_0}{2^n v_0 - 1}$, avec $v_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1}$.
On en déduit :
•
— S'il existe N tel que $u_\mathrm{N} = -1$, alors la suite est stationnaire, donc converge.
— Sinon, si $u_0 = 0$, la suite (u_n) est constante égale à 0, donc converge, et si $u_0 \neq 0$, $\lim u_n = 1$ et (u_n) converge encore.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E} = \mathbb{R}}$$

• Puis, d'après la question précédente, $\sum u_n$ converge ssi $u_0 = 0$ ou il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{p+1} = 0$, soit $u_p \in \{0, -1\}$.
Cela revient à dire : $u_0 = 0$ ou il existe p tel que $u_p = -1$, soit $\dfrac{2^p v_0}{2^p v_0 - 1} = -1$, ou encore $v_0 = \dfrac{1}{2^{p+1}}$, soit : $u_0 = \dfrac{1}{1 - 2^{p+1}}$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{F} = \{0\} \cup \{\frac{1}{1-2^{p+1}},\ p \in \mathbb{N}\}}$$

4. a) • D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|$, d'où $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$. La suite $(|u_n|)$ est donc décroissante, minorée par 0, donc converge.
De plus, en dérivant, on vérifie que les fonctions $x \mapsto f(x) - x$ et $x \mapsto f(x) + x$ sont strictement monotones sur $\mathbb{R}$, donc la seule solution de l'équation $|f(x)| = |x|$ est $x = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ et } \mathrm{E} = \mathbb{R}}$$

• De plus, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $c \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$) tel que : $f(x) = f(0) + xf'(c) = xf'(c)$.
Donc $f(x)$ et x sont de signes contraires, de même pour u_{n+1} et u_n : ainsi, la suite (u_n) est alternée.
La même inégalité donne $|f(x)| \leqslant |x|$, donc $(|u_n|)$ est décroissante, vers 0.
La série de terme général u_n vérifie donc le "critère spécial sur les séries alternées", donc converge.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{F} = \mathbb{R}}$$

b) C'est une application immédiate de ce qui précède.

c) On a ici : $f'(x) = -\mathrm{ch} x$, où $f'(0) = -1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f'(x)| > 1$.
On ne peut donc pas appliquer le résultat précédent. On a ici, en fait, $|u_{n+1}| = |\mathrm{sh}(u_n)| = \mathrm{sh}(|u_n|)$. Or, pour $x > 0$, $\mathrm{sh}(x) > x$, donc, si $u_0 \neq 0$, la suite $(|u_n|)$ est strictement croissante, et tend vers $+\infty$ (car sinon, elle serait majorée, etc...).

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E} = \mathrm{F} = \{0\}}$$

Partie III :

1. **a)** En étudiant les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(x)-x$, on vérifie facilement que :

$$\forall x>0,\ 0<f(x)<x \ \text{ et } \ \forall x<0,\ x<f(x)<0$$

Ainsi, si $u_0 \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout n, et la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc converge vers une solution de l'équation $f(x)=x$, donc vers 0.
On obtient le même résultat pour $u_0 \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{E}=\mathbb{R}}$$

b) • Si $u_0=0$, la suite est constante, égale à 0, donc la série entière $\sum u_n x^n$ converge pour tout x, soit : $\underline{\mathrm{R}=+\infty}$.
• Sinon, u_n ne s'annule pas ($u_n>0$ si $u_0>0$ et $u_n<0$ si $u_0<0$). Puisque $u_n \to 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(u_n)-f(0)}{u_n-0}=f'(0)=1$$

D'après la règle de d'Alembert, $\underline{\mathrm{R}=1}$.

2. **a)** • On suppose ici $u_0>0$. Donc (u_n) est strictement décroissante, de limite nulle.
• D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f' (*en rappeler les hypothèses*), on a :
$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \exists c_x \in]0,x[$ (ou $]x,0[$) tq

$$f'(x)=f'(0)+\sum_{l=1}^{k-2}\frac{x^l f^{(l+1)}(0)}{l!}+\frac{x^{k-1}f^{(k)}(c_x)}{(k-1)!}$$

soit :

$$f'(x)=1+\frac{x^{k-1}f^{(k)}(c_x)}{(k-1)!} \text{ ou } f^{(k)}(c_x)=\frac{(k-1)!}{x^{k-1}}(f'(x)-1)$$

L'expression de droite étant négative pour tout x, on obtient, lorsque x tend vers 0 (et alors, c_x tend aussi vers 0), puisque $f^{(k)}$ est continue : $\boxed{f^k(0)\leqslant 0}$ (et donc $f^{(k)}<0$, puisque on l'a supposé $\neq 0$).
• D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f, on a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \exists c_x\in]0,x[\ (\text{ ou }]x,0[) \text{ tq } f(x)=x+\frac{x^k f^{(k)}(c_x)}{k!}$$

d'où $f(x)-x \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^k f^{(k)}(0)}{k!}$
Or, on a vu que, pour $x<0$, $f(x)-x>0$ et $f^{(k)}(0)<0$.
$\underline{k \text{ est donc nécessairement impair}}$ (car il faut $x^k<0$ pour $x<0$).

b) D'après la formule de Taylor-Young : $f(x)=x+\dfrac{x^k f^{(k)}(0)}{k!}+\mathrm{o}(x^k)$, d'où :
$u_{n+1}=u_n+\dfrac{u_n^k}{k!}f^{(k)}(0)+\mathrm{o}(u_n^k)=u_n\left(1+\dfrac{u_n^{k-1}}{k!}f^{(k)}(0)+\mathrm{o}(u_n^{k-1})\right)$
et : $u_{n+1}^{-\beta}=u_n^{-\beta}\left(1-\beta\dfrac{u_n^{k-1}}{k!}f^{(k)}(0)+\mathrm{o}(u_n^{k-1})\right)$ (on a bien $u_n^{k-1}\to 0$, car $k>1$)
d'où enfin : $u_{n+1}^{-\beta}-u_n^{-\beta} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-\beta u_n^{k-1-\beta}}{k!}f^{(k)}(0)$.
Ainsi, $u_{n+1}^{-\beta}-u_n^{-\beta}$ a une limite finie non nulle ssi $\underline{\beta=k-1}$, et cette limite est alors égale à : $\dfrac{-\beta}{k!}f^{(k)}(0)=\dfrac{1-k}{k!}f^{(k)}(0)$.

c) Comme dans la partie I, on en déduit : $u_n^{-\beta}\sim\dfrac{-n\beta}{k!}f^{(k)}(0)$, soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim}\left(\frac{1-k}{k!}f^{(k)}(0)n\right)^{\frac{1}{1-k}}}$$

d) On a alors : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\sim\dfrac{(n+1)^{\frac{1}{1-k}}}{n^{\frac{1}{1-k}}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est égal à 1.
De plus :

— Pour $x=1$, $\sum u_n$ diverge, car $u_n \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{k-1}}}$, et, ici, $\dfrac{1}{k-1} \leqslant 1$ (comparaison à une série de Riemann).

— Pour $x=-1$, $\sum (-1)^n u_n$ converge, d'après le critère sur les séries alternées (les hypothèses en sont bien vérifiées, voir ci-dessus).

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{G} = [-1,1[}$$

e) Pour $x \leqslant 0$, la série de terme général $u_n x^n$ est alternée, et $|u_n x^n| \leqslant |u_n|$, donc le terme général tend vers 0, et enfin $\left|\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| \leqslant \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant 1$, donc la suite $(|u_n x^n|)$ décroît.

La série $\sum u_n x^n$ vérifie donc le critère sur les séries alternées. Si l'on note $\mathrm{R}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k$, on sait alors que l'on a : $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant |u_{n+1}x^{n+1}|$, d'où $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant |u_{n+1}|$ et
$\displaystyle\sup_{x\in[-1,0]} |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant |u_{n+1}|$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_\infty = 0$, ce qui veut dire que la suite (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[-1,0]$, CQFD.

3. a) Pour $f(x) = \mathrm{th}x$, les hypothèses de la partie précédente sont vérifiées ($\mathrm{th}(0)=0$, $\mathrm{th}'(0)=1$, $\mathrm{th}''(0)=0$, $\mathrm{th}'''(0) = -2 \neq 0$

En appliquant directement les résultats (ici, $k=3$), on obtient : $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{2n}}}$.

b) $\mathrm{Z}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Pour $x \in [0,1[$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Z}(x)$ est croissante (si $x \leqslant y$, $\mathrm{Z}(x) \leqslant \mathrm{Z}(y)$ puisque (u_n) est à termes positifs) ; elle admet donc une limite, finie ou $+\infty$, quand $x \to 1^-$ ("théorème de la limite monotone").
Si il s'agissait d'une limite finie l, on aurait : $\forall x \in [0,1[,\ \mathrm{Z}(x) \leqslant l$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \sum_{k=0}^{n} u_k x^k \leqslant l$$

En faisant $x \to 1^-$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant l$$

Ayant donc ses sommes partielles majorées, la série $\sum u_n$ serait convergente, ce qui n'est pas le cas compte tenu de l'équivalent trouvé ci-dessus.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \lim_{x\to1^-} \mathrm{Z}(x) = +\infty}$$

c) Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$. Puisque $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{2n}}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n u_n = +\infty$, donc, par définition de la limite : $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n > \dfrac{\mathrm{A}}{n}$.

On sait que, pour $x \in [0,1[$, $|\ln(1-x)| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d'où

$$\frac{\mathrm{Z}(x)}{|\ln(1-x)|} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} \geqslant \frac{\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} u_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} \geqslant \mathrm{A}\frac{\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} = \mathrm{A}\left(1 - \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}\right)$$

N étant ainsi fixé, on a, puisque $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x\to1^-} |\ln(1-x)| = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \left(\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}\right) = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]1-\alpha, 1[$, $0 \leqslant \left(\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{A}}{2}$, d'où $\dfrac{\mathrm{Z}(x)}{|\ln(1-x)|} \geqslant \dfrac{\mathrm{A}}{2}$.

Par définition, on a donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\mathrm{Z}(x)}{|\ln(1-x)|}\right)=+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\mathrm{Z}(x)}{\ln(1-x)}\right)=-\infty}$.

BONUS : On peut en fait obtenir des résultats plus précis (*exercice à faire !*)

• On montre déjà le résultat suivant : si (a_n) et (b_n) sont deux suites à termes réels >0 telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et telle que la série entière $\sum b_n x^n$ ait pour rayon de convergence 1 et diverge pour $x=1$, alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (la démonstration est analogue à celle du théorème de Césaro).

Cela nous donne ici : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

• Par une méthode de comparaison série-intégrale, en écrivant $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=\dfrac{\mathrm{e}^{n\ln x}}{\sqrt{n}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-(-n\ln x)}}{\sqrt{n}}$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathrm{Z}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆